Introduction

Le principal but de ce projet est de savoir quand est-ce qu'une isométrie est linéaire.

Nous pouvons tout d'abord nous demander si une isométrie sur un espace-vectoriel normé est nécessairement linéaire.
Ce n'est pas la cas : il suffit de considérer $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, \sin t) \end{array}$.

La question suivante est : dans quel cas une isométrie sur un espace-vectoriel normé est-elle linéaire ?
Le Théorème 1.3 de Mazur-Ulam donne un élément de réponse.

Pour finir nous pourrons étudier la question suivante : s'il existe une isométrie non linéaire entre deux espaces-vectoriels normés, alors existe-t-il une isométrie linéaire entre ces espaces ?

Pour commencer, nous démontrerons le Théorème 1.3 de Mazur-Ulam de deux manières différentes : tout d'abord nous donnerons la démonstration historique, puis une preuve plus récente due à Jussi Väisälä.

Ensuite, nous énoncerons une généralisation du Théorème de Mazur-Ulam : le Théorème 2.5 de Figiel. Pour sa démonstration nous aurons besoin de quelques résultats relatifs à la différentiabilité des fonctions convexes.

Dans une troisième et dernière partie, nous étudierons les espaces Lipschitz-libres. Nous commencerons par en donner la définition ainsi que leurs premières propriétés, et l'exemple suivant : l'espace Lipschitz-libre de $\mathbb{R}$ est $L^1(\mathbb{R})$. Dans une deuxième sous-partie, nous introduirons la notion de propriété de relèvement et donnerons quelques caractérisations de cette propriété.
Finalement nous nous intéresserons plus particulièrement au cas des espaces séparables. Nous montrerons le Théorème 3.30 de Godefroy-Kalton : tout espace de Banach séparable a la propriété de relèvement isométrique. Grâce à ce Théorème, nous pourrons montrer que si X et Y sont deux espaces de Banach tels que X soit séparable, et $Q : Y \to X$ est une application linéaire continue surjective admettant un inverse à droite Lipschitzien, alors Q admet un inverse à droite linéaire. De plus, s'il existe une injection isométrique de X dans Y, alors Y contient un sous-espace vectoriel fermé linéairement isométrique à X.
Ces résultats permettent entre autre de décomposer toute isométrie sur un espace de Banach en somme d'une isométrie linéaire et d'une partie non linéaire qui ne change pas la norme.

Table des matières

1 Théorème de Mazur-Ulam **3**
1.1 Démonstration historique du théorème de Mazur-Ulam 4
1.2 Une autre preuve du théorème de Mazur-Ulam 8

2 Théorème de Figiel **9**
2.1 Prérequis 9
2.2 Démonstration du théorème de Figiel 14

3 Les espaces Lipschitz-libres et le Théorème de Godefroy-Kalton **18**
3.1 Définition des espaces Lipschitz-libres 18
3.2 Propriété de relèvement 22
3.3 Cas des espaces séparables : le théorème de Godefroy-Kalton 28
3.3.1 Un résultat préliminaire : le théorème de Rademacher 28
3.3.2 Retour au cas des espaces séparables 37

1 Théorème de Mazur-Ulam

Définition 1.1 *Soient (M,d) et (N,d') deux espaces métriques.*
Une application $f : M \to N$ est une isométrie si $\forall x,y \in M, d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$.

Proposition 1.2 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Une application continue $f : X \to Y$ est affine si et seulement si*

$$\forall x,y \in X, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Preuve :

1. Il est évident que si f est affine, alors $\forall x,y \in X, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

2. Réciproquement, si $f(0) = 0$, on a : $\forall x \in X, f\left(\frac{x}{2}\right) \overset{*}{=} \frac{1}{2}f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$.

   En effet,
   $$\frac{f(-x)+f(x)}{2} = f\left(\frac{-x+x}{2}\right) = f(0) = 0$$

   Soient $x,y \in X$, alors

   $$f(x+y) = f\left(\frac{1}{2}(2x+2y)\right) = \frac{1}{2}(f(2x)+f(2y)) \overset{*}{=} f\left(\frac{2x}{2}\right)+f\left(\frac{2y}{2}\right) = f(x)+f(y)$$

   On remarque alors que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(kx) = kf(x)$ et $f(ky) = kf(y)$, également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{k}{2^n}x\right) = \frac{k}{2^n}f(x)$ et $f\left(\frac{k}{2^n}y\right) = \frac{k}{2^n}f(y)$.

   Considérons l'ensemble $D = \left\{\frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, k \in \{0,1,...,2^n\}\right\} \subset [0,1]$. Alors D est dense dans $[0,1]$.

   Soit $t \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $t_1 = k/2^n$ et $t_2 = k'/2^{n'}$ tels que

   $$|t - t_1| < \varepsilon \text{ et } |(1-t) - t_2| < \varepsilon$$

   Finalement, on a vu que

   $$\begin{aligned} f(t_1x + t_2y) &= f(t_1x) + f(t_2y) = f\left(\frac{k}{2^n}x\right) + f\left(\frac{k'}{2^{n'}}x\right) \\ &= \frac{k}{2^n}f(x) + \frac{k'}{2^{n'}}f(y) = t_1f(x) + t_2f(y) \end{aligned}$$

   Comme f est continue, en faisant tendre ε vers 0, on obtient :

   $$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$$

   Donc f est linéaire.

Si $f(0) = a \neq 0$, on pose $\forall x \in X, g(x) = f(x) - a$. Alors g est continue tout comme f et elle vérifie également $\forall x, y \in X, g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$. De plus, $g(0) = 0$ donc d'après ce qui précède, g est linéaire. Comme $\forall x \in X, f(x) = g(x) + a$, f est affine.

$\square$

1.1 Démonstration historique du théorème de Mazur-Ulam

Stanislaw Mazur (1905-1981) et Stanislaw Ulam (1909-1984) sont deux mathématiciens d'origines polonaises. Tout deux élèves de Stefan Banach, ils ont publiés en 1932 dans [5] une démonstration du théorème suivant :

Théorème 1.3 (Mazur-Ulam) *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Si $f : X \to Y$ est une isométrie surjective, alors f est affine.*

Preuve : Soient $x, y \in X$. Définissons par récurrence une suite décroissante de fermés de X :

$$\begin{aligned} K_0 &= \left\{ u \in X \mid \|u - x\| = \|u - y\| = \frac{\|x - y\|}{2} \right\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} &= \{u \in K_n \mid K_n \subset B(u, d_n/2)\} \end{aligned}$$

où d_n est le diamètre de K_n.

a) Montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \left\{\frac{x+y}{2}\right\}$:

Pour simplifier les notations, on peut supposer que $x \overset{*}{=} -y$ car X est un espace-vectoriel.

Donc $\frac{x+y}{2} = 0$. Il s'agit donc de montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{0\}$.

· Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est symétrique.
Pour n=0 : soit $u \in K_0$

$$\begin{aligned} \|-u - x\| &= \|u + x\| \overset{*}{=} \|u - y\| = \frac{x - y}{2} \\ \|-u - y\| &= \|u + y\| \overset{*}{=} \|u - x\| = \frac{x - y}{2} \end{aligned}$$

Donc $-u \in K_0$ et K_0 est symétrique.

Supposons que K_n symétrique. Soit $u \in K_{n+1}$, i.e. $u \in K_n$ et $K_n \subset B\left(u, \frac{d_n}{2}\right)$.

Alors par hypothèse, $-u \in K_n$ et $K_n \subset B\left(-u, \frac{d_n}{2}\right)$.

· Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \in K_n$.
$0 \in K_0$ car comme $x = -y$,

$$\begin{aligned} \|0 - x\| &= \|x\| = \left\|\frac{2x}{2}\right\| \overset{*}{=} \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \\ \|0 - y\| &= \|y\| = \left\|\frac{2y}{2}\right\| \overset{*}{=} \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \end{aligned}$$

Supposons que $0 \in K_n$. On a montré que K_n est symétrique, donc si $u \in K_n$, alors $-u \in K_n$.

$$\|0 - u\| = \|u\| = \frac{\|u - (-u)\|}{2} \leqslant \frac{d_n}{2}$$

D'où $K_n \subset B\left(0, \dfrac{d_n}{2}\right)$ et $0 \in K_{n+1}$.

· $d_n \longrightarrow 0$
En effet, si $u, v \in K_n$, alors $v \in K_{n-1}$ et $K_{n-1} \subset B\left(u, \dfrac{d_{n-1}}{2}\right)$, donc $v \in B\left(u, \dfrac{d_{n-1}}{2}\right)$.
...
$v \in B\left(u, \dfrac{d_0}{2^n}\right)$. Ainsi, le diamètre de K_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \in K_n$, donc $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{0\}$.

Finalement, à une translation près, on a montré que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \left\{\frac{x+y}{2}\right\}$. Ceci donne une définition métrique de $\dfrac{x+y}{2}$.

De la même façon on peut caractériser $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, en définissant par récurrence une suite décroissante de fermés de Y :

$$\begin{aligned} F_0 &= \left\{v \in Y \mid \|v - f(x)\| = \|v - f(y)\| = \frac{\|f(x) - f(y)\|}{2}\right\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} &= \{v \in F_n \mid F_n \subset B(v, d'_n/2)\} \end{aligned}$$

où d'_n est le diamètre de F_n.

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, f(K_n) = F_n$, on aura alors $f\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$:

Procédons par récurrence sur n.
· Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} K_0 &= \left\{u \in X \mid \|u - x\| = \|u - y\| = \frac{\|x - y\|}{2}\right\} \\ F_0 &= \left\{v \in Y \mid \|v - f(x)\| = \|v - f(y)\| = \frac{\|f(x) - f(y)\|}{2}\right\} \end{aligned}$$

Soit $v \in f(K_0)$, c'est à dire qu'il existe $u \in K_0$ tel que $f(u) = v$. Alors

$$\|v - f(x)\| = \|f(u) - f(x)\| = \|u - x\| = \frac{\|x - y\|}{2} = \frac{\|f(x) - f(y)\|}{2}$$

car f est une isométrie et $u \in K_0$.

On montre de même que $\|v - f(y)\| = \dfrac{\|f(x) - f(y)\|}{2}$, donc $v \in F_0$.

Ainsi, $f(K_0) \subset F_0$.

Soit $v \in F_0$, comme f est surjective il existe $u \in X$ tel que $f(u) = v$. Alors

$$\|u - x\| = \|f(u) - f(x)\| = \|v - f(x)\| = \frac{\|f(x) - f(y)\|}{2} = \frac{\|x - y\|}{2}$$

car f est une isométrie et $v \in F_0$.

On montre de même que $\|u - y\| = \dfrac{\|x - y\|}{2}$, donc $u \in K_0$ et $v \in f(K_0)$.

Ainsi, $F_0 \subset f(K_0)$.

Finalement, $F_0 = f(K_0)$.

· Supposons que $F_n = f(K_n)$ et montrons que $F_{n+1} = f(K_{n+1})$.

Rappelons que

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= \left\{ u \in K_n \mid K_n \subset B\left(u, \frac{d_n}{2}\right) \right\}, \text{ où } \ d_n = \operatorname{diam}(K_n) \\ F_{n+1} &= \left\{ v \in F_n = f(K_n) \mid F_n = f(K_n) \subset B\left(v, \frac{d'_n}{2}\right) \right\}, \end{aligned}$$

où d'_n =diam(F_n) =diam$(K_n) = d_n$ car $F_n = f(K_n)$ et f est une isométrie.

Soit $v \in f(K_{n+1})$, c'est à dire qu'il existe $u \in K_{n+1}$ tel que $f(u) = v$.

Comme $u \in K_{n+1}, u \in K_n$, donc $v \in f(K_n) = F_n$.

Soit $w \in F_n = f(K_n)$, alors il existe $z \in K_n$ tel que $f(z) = w$. On a

$$\|w - v\| = \|f(z) - f(u)\| = \|z - u\|$$

Comme $u \in K_{n+1}$, on a $K_n \subset B(u, d_n/2)$ et $z \in K_n$, donc $\|z - u\| \leqslant d_n/2$. Ainsi, $F_n \subset B(v, d_n/2) = B(v, d'_n/2)$.

Donc $v \in F_{n+1}$ et $f(K_{n+1}) \subset F_{n+1}$.

Soit $v \in F_{n+1}$. Comme f est surjective, il existe $u \in X$ tel que $f(u) = v$. Montrons que $u \in K_{n+1}$:

Comme $v \in F_n = f(K_n)$, on peut supposer que $u \in K_n$.

Soit $w \in K_n$. Alors $f(w) \in f(K_n) = F_n$.

$$\|w - u\| = \|f(w) - v\| \leqslant \frac{d'_n}{2} = \frac{d_n}{2}$$

car f est une isométrie, $v \in F_{n+1}$ et $f(w) \in K_n$.

Ainsi, $K_n \subset B(u, d_n/2)$.

Donc $u \in K_{n+1}$ et $v \in f(K_{n+1})$. D'où $F_{n+1} \subset f(K_{n+1})$.

Finalement, $F_{n+1} = f(K_{n+1})$.

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n = f(K_n)$, donc $f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, c'est à dire que f est affine sur X.

□

En adaptant cette démonstration, il est possible de généraliser ce théorème au cas où f est simplement une isométrie locale surjective :

Théorème 1.4 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert connexe de X et A un ouvert de Y. Si $f : \Omega \to A$ est une isométrie locale surjective, alors f est la restriction d'une isométrie affine surjective de X dans Y.*

En particulier toute isométrie surjective de X dans Y est affine. (Théorème 1.3 de Mazur-Ulam)

Définition 1.5 *$f : X \to Y$ est une isométrie locale si $\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f|_U$ est une isométrie .*

Preuve : Soit $z \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(z, 2r) \subset \Omega$.
Nous allons montrer que si f est une isométrie surjective de $B(z, 2r)$ sur $B(f(z), 2r)$, alors f est affine sur $B(z, r)$:

Soit $x, y \in B(z, r)$. Montrons que $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

Définissons par récurrence une suite décroissante de fermés :

$$\begin{aligned} K_0 &= \left\{u \in \Omega \mid \|u-x\| = \|u-y\| = \frac{\|x-y\|}{2}\right\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, K_n &= \{u \in K_n \mid K_n \subset B(u, d_n/2)\} \end{aligned}$$

où d_n est le diamètre de K_n.

1. $K_0 \subset B(z, 2r)$
   Soit $u \in K_0$
   $$\|z-u\| \leqslant \|z-x\| + \|x-u\| \leqslant r + \frac{\|x-y\|}{2} \leqslant r + \frac{2r}{2} = 2r$$
   car x et $y \in B(z, r)$ et $u \in K_0$
   Donc $K_0 \subset B(z, 2r)$.
2. Comme f est une isométrie locale, on peut choisir r tel que f soit une isométrie sur $B(z, 2r)$, et donc f est une isométrie sur K_0.
3. De la même façon que dans la preuve précédente, on montre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \left\{\dfrac{x+y}{2}\right\}$, on caractérise $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ et on montre que $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Finalement, nous avons montré que pour tout $z \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que f soit affine sur $B(z, r)$. Par connexité de Ω, f est affine sur Ω.

□

1.2 Une autre preuve du théorème de Mazur-Ulam

En 2003, Jussi Väisälä donne dans [7] une preuve plus simple du théorème de Mazur-Ulam utilisant simplement les propriétés des symétries suivantes :

Remarque 1.6 *Soient X un espace vectoriel normé, $z \in X$ et* $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & 2z - x \end{array} \right.$.
Alors

1. $\psi \circ \psi = Id|_X$
2. ψ *est bijective et* $\psi^{-1} = \psi$
3. ψ *est une isométrie*
4. z *est l'unique point de X tel que* $\psi(z) = z$
5. *Pour tout* $x \in X$,

$$\begin{array}{rcl} \|\psi(x) - z\| & = & \|x - z\| \\ \|\psi(x) - x\| & = & 2\,\|x - z\| \end{array}$$

En effet,

1. Soit $x \in X$, $\psi(\psi(x)) = \psi(2z - x) = 2z - (2z - x) = x$
2. donc ψ est bijective d'inverse ψ.
3. Soit $x, y \in X$, $\|\psi(x) - \psi(y)\| = \|2z - x - (2z - y)\| = \|y - x\|$. Donc ψ est une isométrie.
4. Soit $x \in X$, $\psi(x) = x \Leftrightarrow 2z - x = x \Leftrightarrow 2z = 2x \Leftrightarrow z = x$.
5. Soit $x \in X$,

$$\begin{array}{rcl} \|\psi(x) - z\| & = & \|2z - x - z\| = \|z - x\| \\ \|\psi(x) - x\| & = & \|2z - x - x\| = 2\,\|z - x\| \end{array}$$

Théorème 1.7 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $f : X \to Y$ une isométrie bijective. Alors f est affine.*

Preuve : Soient $a, b \in X$. Posons $z = \dfrac{a+b}{2}$.
Soient W l'ensemble des isométries bijectives $g : X \to X$ telles que $g(a) = a$ et $g(b) = b$, et soit $\lambda = \sup\{\|g(z) - z\|\,, g \in W\}$
Soit $g \in W$. Comme $g(a) = a$ et g est une isométrie,

$$\|g(z) - a\| = \|g(z) - g(a)\| = \|z - a\|$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \|g(z) - z\| & \leqslant & \|g(z) - a\| + \|a - z\| = \|z - a\| + \|a - z\| \\ & = & 2\,\|a - z\| = 2\left\|a - \dfrac{a+b}{2}\right\| = \|a - b\| \end{array}$$

Donc $\lambda \leqslant \|a - b\| < +\infty$

Considérons $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & 2z - x \end{array} \right.$.
Pour $g \in W$, posons $g^* = \psi \circ g^{-1} \circ \psi \circ g$.

1. $\forall g \in W, g^* \in W$:
   g^* est une isométrie bijective comme composée d'isométries bijective ($g \in W$ et pour ψ cf Remarque 1.6)
   $g^*(a) = \psi g^{-1}\psi g(a) = \psi g^{-1}\psi(a) = \psi g^{-1}(2z - a) = \psi g^{-1}(b) = \psi(b) = 2z - b = a$
   De même, $g^*(b) = b$.
2. $\|g^*(z) - z\| \leqslant \lambda$: car $g^* \in W$ et $\lambda = \sup\{\|h(z) - z\|, h \in W\}$.
3.

$$\begin{aligned} 2\|gz - z\| &\overset{i}{=} \|\psi gz - gz\| \overset{ii}{=} \left\|g^{-1}\psi gz - z\right\| \\ &\overset{iii}{=} \left\|\psi g^{-1}\psi gz - z\right\| \overset{iv}{=} \|g^* z - z\| \leqslant \lambda, \forall g \in X \end{aligned}$$

   $i)$ d'après 5. de la Remarque 1.6 et car $x = gz$
   $ii)$ car g^{-1} est une isométrie
   $iii)$ d'après 5. de la Remarque 1.6 et car $x = g^{-1}\psi gz$
   $iv)$ par définition de g^*

   Donc $\sup\{2\|gz - z\|, g \in W\} \leqslant \lambda$. On en déduit que $2\lambda \leqslant \lambda$ et $\lambda = 0$. C'est-à-dire que pour tout $g \in W$, $g(z) = z$.

Soit $f : X \to Y$ une isométrie bijective.
Soit $z' = \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$.

Montrons que $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$, i.e. $f(z) = z'$.

Pour cela, définissons $\psi' : \left\{\begin{array}{ccc} Y & \to & Y \\ x & \mapsto & 2z' - x \end{array}\right.$

Alors $h := \psi f^{-1}\psi' f \in W$. En effet :
- h est une isométrie bijective comme composée d'isométrie bijective
- $h(a) = \psi f^{-1}\psi' f(a) = \psi f^{-1}(2z' - f(a)) = \psi f^{-1}(f(b)) = \psi(b) = a$
- de même $h(b) = b$

Ainsi, $h(z) = z$
i.e. $\psi f^{-1}\psi' f(z) = z$
i.e. $f^{-1}\psi' f(z) = \psi(z)$
i.e. $f^{-1}\psi' f(z) = z$
i.e. $\psi' f(z) = f(z)$
Or z' est l'unique point fixe de ψ', donc $f(z) = z'$.

□

2 Théorème de Figiel

2.1 Prérequis

Définition 2.1 *Soit X un espace vectoriel normé.*
Un point x de X est dit lisse si $\|.\|_X$ est Gâteaux différentiable en x.
i.e. il existe $T : X \to \mathbb{R}$ linéaire continue tel que $\forall h \in X, \|x + th\| = \|x\| + tT(h) + o(|t|)$ lorsque $t \in \mathbb{R}$ tend vers 0.

Théorème 2.2 *Une fonction convexe continue sur un ouvert d'un espace de Banach séparable à valeurs réelles est Gâteaux-différentiable sur un $\mathcal{G}_\delta$-dense de son domaine de définition.*

Commençons par démontrer un lemme :

Lemme 2.3 *Soit X un espace vectoriel normé et $f : X \to \mathbb{R}$ convexe continue. Alors f est Gâteaux-différentiable en $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall u \in X, \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) + f(x_0 - tu) - 2f(x_0)}{t} = 0$$

Preuve :

$\Rightarrow$ Supposons f Gâteaux-différentiable en x_0. Alors il existe $T : X \to \mathbb{R}$ linéaire continue telle que $\forall u \in X, \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} = Tu$.

En $-u$ on obtient : $\lim_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 - tu) - f(x_0)}{t} = T(-u) = -Tu$.
On en déduit que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0) + f(x_0 - tu) - f(x_0)}{t} = 0, \forall u \in X$$

$\Leftarrow$ Réciproquement, soit $h \in X$.

1. Montrons que $\lim_{t \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$ et $\lim_{t \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$ existent :
   Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(x_0 + th) - f(x_0)$.
   Alors g est convexe sur $\mathbb{R}$.
   Soient $t_1 < 0 < t_2$. Comme g est convexe,

$$\frac{g(t_1) - g(0)}{t_1 - 0} \leqslant \frac{g(t_1) - g(t_2)}{t_1 - t_2} \leqslant \frac{g(t_2) - g(0)}{t_2 - 0}$$

   Le premier membre est croissant et majoré par le deuxième donc

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \to 0^-} \frac{g(t_1) - g(0)}{t_1} &= \lim_{t_1 \to 0^-} \frac{f(x_0 + t_1 h) - f(x_0) - f(x_0) + f(x_0)}{t_1} \\ &= \lim_{t_1 \to 0^-} \frac{f(x_0 + t_1 h) - f(x_0)}{t_1} \quad \text{existe.} \end{aligned}$$

   Le dernier membre est décroissant et minoré par le deuxième donc

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \to 0^+} \frac{g(t_2) - g(0)}{t_2} &= \lim_{t_2 \to 0^+} \frac{f(x_0 + t_2 h) - f(x_0) - f(x_0) + f(x_0)}{t_2} \\ &= \lim_{t_2 \to 0^+} \frac{f(x_0 + t_2 h) - f(x_0)}{t_2} \quad \text{existe.} \end{aligned}$$

2. Montrons que ces deux limites sont égales :
   $\dfrac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} - \dfrac{f(x_0 - th) - f(x_0)}{-t} = \dfrac{f(x_0 + th) + f(x_0 - th) - 2f(x_0)}{t}$
   $\to 0$ lorsque t tend vers 0 par hypothèse.

Donc

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0-th)-f(x_0)}{-t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$$

Ainsi, pour f convexe et x_0 fixé, $\forall h\in X, \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=Th$ existe.

3. Montrons que T est linéaire :
   - $\forall h\in X, T(-h)=-T(h)$:

$$\begin{aligned}T(-h) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t(-h))-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0-th)-f(x_0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{-t}=-\lim_{t\to 0^-}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}\\ &= -\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=-Th\end{aligned}$$

   - Montrons que $\forall h\in X, \forall\lambda>0, T(\lambda h)=\lambda T(h)$:

$$\begin{aligned}T(\lambda h) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t(\lambda h))-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\lambda\frac{f(x_0+(t\lambda)h)-f(x_0)}{t\lambda}\\ &= \lim_{r\to 0^+}\lambda\frac{f(x_0+rh)-f(x_0)}{r}=\lambda T(h)\end{aligned}$$

   - On a alors $\forall h\in X, \forall\lambda\in\mathbb{R}, T(\lambda h)=\lambda T(h)$.
   - Montrons que $\forall h,k\in X, T(h+k)=Th+Tk$
     Remarquons que comme f est convexe,

$$\forall y,z\in X,\ f\left(\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}f(y)+\frac{1}{2}f(z)$$

     Soient $h,k\in X$

$$\begin{aligned}T(h+k) &= 2T\left(\frac{h+k}{2}\right)=2\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(x+t(\frac{h+k}{2})\right)-f(x)}{t}\\ &= 2\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{x+th}{2}+\frac{x+tk}{2}\right)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(x)}{t}\\ &\leqslant 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}[f(x+th)-f(x)]+\frac{1}{2}[f(x+tk)-f(x)]}{t}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}+\frac{f(x+tk)-f(x)}{t}=Th+Tk\end{aligned}$$

     On a montré que $T(h+k)\leqslant Th+Tk, \forall h,k\in X$.

     De plus,

$$\begin{aligned}-Th-Tk &= T(-h)+T(-k)\geqslant T(-h-k)=T(-(h+k))\\ &= -T(h+k)\geqslant -Th-Tk\end{aligned}$$

     D'où $-T(h+k)=-Th-Tk$ et $T(h+k)=Th+Tk$.

Finalement, nous avons montré que T est linéaire.

4. T est continue : Commençons par montrer le résultat plus général suivant :

Proposition 2.4 *Soit U un ouvert de X et $f : U \to \mathbb{R}$ convexe et continue en x_0. Alors f est localement Lipschitzienne en x_0 :*

$$\exists M > 0, \exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset U \text{ et } |f(x) - f(y)| \leqslant M \|x - y\|, \forall x, y \in B(x_0, \delta)$$

Preuve : Comme f est continue en x_0, f est localement bornée, i.e.

$$\exists M_1 > 0, \delta > 0 : |f| \leqslant M_1 \text{ sur } \ B(x_0, 2\delta) \subset U$$

Soient $x \neq y \in B(x_0, \delta)$ et soit $\alpha = \|x - y\|$. Soit $z \in B(x_0, 2\delta)$ tel que $y = \dfrac{\alpha}{\alpha+\delta} z + \dfrac{\delta}{\alpha+\delta} x$. Alors, comme f est convexe,

$$f(y) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha+\delta} f(z) + \frac{\delta}{\alpha+\delta} f(x)$$

i.e.

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leqslant \frac{\alpha}{\alpha+\delta} f(z) + \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta} - 1\right) f(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\delta}(f(z) - f(x)) \\ &\leqslant \frac{\alpha}{\alpha+\delta} 2M_1 \leqslant \frac{\alpha}{\delta} 2M_1 \leqslant M \|x - y\| \end{aligned}$$

avec $M = \dfrac{2M_1}{\delta}$
De même on montre que $f(x) - f(y) \leqslant M \|y - x\|$. D'où :

$$\forall x, y \in B(x_0, \delta), |f(x) - f(y)| \leqslant M \|x - y\|$$

□

Montrons maintenant que T est continue :
f étant convexe continue, d'après la Proposition elle est localement Lipschitzienne :
il existe un voisinage B de x_0 et $M > 0$ tel que si $x \in X$ et $t > 0$ assez petit pour que $x_0 + tx \in B$,

$$f(x_0 + tx) - f(x_0) \leqslant Mt \|x\|$$

Ainsi, pour tout $x \in X$,

$$Tx = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} \leqslant M \|x\|$$

C'est à dire que T est continue.

Finalement, on a montré que f est Gâteaux-différentiable en x_0.

□

Démontrons maintenant le théorème 2.2 :

Preuve : Soient X un espace de Banach séparable, U un ouvert de X et $f : U \to \mathbb{R}$ convexe continue.

Soit $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans S_X. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$G_{n,m} = \left\{ x \text{ tel que } \ \exists \delta > 0 : |f(x+\delta y_m) + f(x-\delta y_m) - 2f(x)| < \frac{\delta}{n} \right\}$$

et G est l'ensemble des points de X où f est Gâteaux-différentiable.

1. Montrons que $G = \bigcap_{n,m} G_{n,m}$. Les $G_{n,m}$ étant ouverts, cela ferait de G un $\mathcal{G}_\delta$.

   · $G \subset \bigcap_{n,m} G_{n,m}$

   Soit $x \in G$. Pour tout $u \in X$, $\dfrac{f(x+tu) + f(x-tu) - 2f(x)}{t} \longrightarrow 0$ lorsque $t \to 0$.
   En particulier, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f(x+ty_m) + f(x-ty_m) - 2f(x)}{t} \longrightarrow 0$.
   C'est à dire :

   $$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall t \leqslant \eta, |f(x+ty_m) + f(x-ty_m) - 2f(x)| < \varepsilon t$$

   Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, on pose alors $\eta = \delta_{m,n}$. On a donc

   $$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta_{m,n} > 0 : |f(x+\delta_{m,n}y_m) + f(x-\delta_{m,n}y_m) - 2f(x)| < \frac{\delta_{m,n}}{n}$$

   Autrement dit, $x \in \bigcap_{n,m} G_{n,m}$.

   · $\bigcap_{n,m} G_{n,m} \subset G$

   Soit $x \in \bigcap_{n,m} G_{n,m}$. Procédons par l'absurde en supposant $x \notin G$. Alors il existe $y \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante vers 0 tels que

   $$\left| \frac{f(x+t_k y) + f(x-t_k y) - 2f(x)}{t_k} \right| > \frac{1}{n}, \forall k \in \mathbb{N}$$

   Comme f est localement Lipschitzienne et par densité des $y_m, m \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\left| \frac{f(x+t_k y_m) + f(x-t_k y_m) - 2f(x)}{t_k} \right| > \frac{1}{n}, \forall k \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

   Or, on remarque que s'il existe $\delta > 0$ tel que

   $$\left| \frac{f(x+\delta y_m) + f(x-\delta y_m) - 2f(x)}{\delta} \right| < \frac{1}{n}$$

   alors, pour tout $t \leqslant \delta$,

   $$\left| \frac{f(x+t y_m) + f(x-t y_m) - 2f(x)}{t} \right| < \frac{1}{n}$$

Comme $x \in G_{n,m}$ et la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, on a, à partir d'un certain rang K :

$$\left|\frac{f(x+t_k y_m)+f(x-t_k y_m)-2f(x)}{t_k}\right| < \frac{1}{n}, \forall k > K$$

ce qui contredit $(*)$. Donc $x \in G$ et $G = \bigcap\limits_{n,m} G_{m,n}$.

2. Montrons que pour tout $n, m \in \mathbb{N}, G_{m,n}$ est dense. Soit $x \in X$, $\varepsilon > 0$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Posons , $\forall t, \varphi_m(t) = f(x + t y_m)$.
   Alors φ_m est convexe continue, tout comme f. L'ensemble des points sur lequel φ_m n'est pas dérivable est un ensemble fini ou dénombrable. En particulier, l'ensemble des points où φ_m est dérivable est dense.
   Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}, 0 \in \overline{\{t \in \mathbb{R} \mid \varphi_m'(t) \text{ existe}\}}^{\mathbb{R}}$.
   Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $|t_m| < \varepsilon$ tel que $\varphi_m'(t_m)$ existe.
   Alors, $\dfrac{f(x+t_m y_m+t y_m)+f(x+t_m y_m-t y_m)-2f(x+t_m y_m)}{t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.
   En posant $x_m = x + t_m y_m$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{f(x_m+\delta y_m)+f(x_m-\delta y_m)-2f(x_m)}{\delta} < \frac{1}{n}$$

   i.e. $x \in G_{n,m}$.
   Or, $\|x_m - x\| = \|x + t_m y_m - x\| = |t_m| \, \|y_m\| < \varepsilon$.
   Donc $x \in \overline{G_{n,m}}$ et $G_{n,m}$ est dense dans X.

   Comme $G = \bigcap_{n,m} G_{n,m}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses, d'après le Théorème de Baire G est dense.

□

2.2 Démonstration du théorème de Figiel

En 1968, T. Figiel démontre dans [2] une généralisation du Théorème de Mazur-Ulam :

Théorème 2.5 (Figiel) *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $f : X \to Y$ une isométrie telle que $f(0) = 0$.*
Alors il existe une unique application Q de $\overline{\text{vect}} f(X)$ dans X linéaire continue telle que $\|Q\| \leqslant 1$ et $\forall x \in X, Q \circ f(x) = x$.

En fait, il suffit de montrer le résultat simplifié suivant :

Proposition 2.6 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $f : X \to Y$ une isométrie telle que $f(0) = 0$.*
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}, \forall x_1, ..., x_n \in X$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|_X \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right\|_Y$$

En effet, supposons que l'on ait montré cette proposition, alors on définit Q sur $vect\ f(X)$ de la façon suivante :
Soit $y \in vect\ f(X)$:

il existe $n \in \mathbb{N}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x_1, ..., x_n \in X$ tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. On pose alors

$$Q(y) = Q(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Montrons que Q est bien définie :
Soit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j f(x'_j)$. Alors d'après la Proposition

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{j=1}^{m} \mu_j x'_j \right\|_X \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j f(x'_j) \right\|_Y = 0$$

D'où $Q(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)) = Q(\sum_{j=1}^{m} \mu_j f(x'_j))$.

D'après la Proposition, Q est de norme inférieure ou égale 1 sur $vect\ f(X)$, par continuité de Q on peut la prolonger à $\overline{vect}\ f(X)$ en une application linéaire continue $\overline{Q} : \overline{vect}\ f(X) \to X$ de norme inférieure ou égale à 1.
De plus pour $x \in X$, $\overline{Q} \circ f(x) = \overline{Q}(f(x)) = x$. Ceci impose l'unicité de Q sur $vect\ f(X)$ et donc l'unicité de $\overline{Q}$ sur $\overline{vect}\ f(X)$.

Il ne reste donc qu'à montrer la Proposition 2.6

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $x_1, ..., x_n \in X$. Notons $E = vect\ \{x_1, ..., x_n\}$

1. Soit $x \in E, \|x\| = 1$.

   Montrons qu'il existe $u_x^* \in S_{Y^*}$ telle que $\|u_x^*\| = 1$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u_x^* \circ f(\lambda x) = \lambda$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $u_{x_k}^* \in S_{Y^*}$ telle que

   $$< u_{x_k}^*, f(kx) - f(-kx) >= \|f(kx) - f(-kx)\|$$

   De plus f est une isométrie donc

   $$< u_{x_k}^*, f(kx) - f(-kx) >= \|f(kx) - f(-kx)\| = \|kx - (-kx)\| = 2k \|x\| = 2k$$

   Montrons que $u_{x_k}^* \circ f$ est une application 1-lipschitzienne :
   Soient $x, y \in E$

   $$\begin{aligned} |u_{x_k}^* \circ f(u) - u_{x_k}^* \circ f(v)| &= | < u_{x_k}^*, f(u) - f(v) > | \leqslant \left\|u_{x_k}^*\right\| \|f(u) - f(v)\| \\ &= \|f(u) - f(v)\| = \|u - v\| \end{aligned}$$

   car $u_{x_k}^* \in S_{Y^*}$ et f est une isométrie.
   Ainsi, $u_{x_k}^* \circ f$ est 1-lipschitzienne.

   On a

   $$|u_{x_k}^* \circ f(kx)| = |u_{x_k}^* \circ f(kx) - u_{x_k}^* \circ f(0)| \leqslant \|kx - 0\| = k \|x\| = k$$

Donc $u^*_{x_k} \circ f(kx) \in [-k,k]$, et de même $u^*_{x_k} \circ f(-kx) \in [-k,k]$. De plus,

$$u^*_{x_k} \circ f(kx) - u^*_{x_k} \circ f(-kx) =< u^*_{x_k}, f(kx) - f(-kx) >= 2k \geqslant 0$$

Donc $u^*_{x_k} \circ f(kx) = k$ et $u^*_{x_k} \circ f(-kx) = -k$.

Soit $0 \leqslant \lambda \leqslant k$. Montrons que $u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) = \lambda$:

$$|u^*_{x_k} \circ f(\lambda x)| = |u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) - u^*_{x_k} \circ f(0)| \leqslant \|\lambda x - 0\| = \lambda$$

Donc $u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) \in [-\lambda, \lambda]$. De plus,

$$|u^*_{x_k} \circ f(kx) - u^*_{x_k} \circ f(\lambda x)| \leqslant \|kx - \lambda x\| = |k - \lambda| = k - \lambda$$

Ainsi $u^*_{x_k} \circ f(kx) - k + \lambda \leqslant u^*_{x_k} \circ f(\lambda x)$. Mais comme $u^*_{x_k} \circ f(kx) = k$, $u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) \geqslant \lambda$ et finalement $u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) = \lambda$

Soit $-k \leqslant \lambda \leqslant 0$.

$$|u^*_{x_k} \circ f(\lambda x)| = |u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) - u^*_{x_k} \circ f(0)| \leqslant |\lambda|$$

Donc $u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) \in [\lambda, -\lambda]$. De plus comme $u^*_{x_k} \circ f$ est 1-lipschitzienne,

$$\begin{array}{rl} & |u^*_{x_k} \circ f(-kx) - u^*_{x_k} \circ f(\lambda x)| \leqslant |-k-\lambda| = k + \lambda \\ \text{d'où} & -k - \lambda \leqslant u^*_{x_k} \circ f(-kx) - u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) \end{array}$$

et comme $u^*_{x_k} \circ f(-kx) = -k$, $u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) \leqslant \lambda$.
Finalement, $u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) = \lambda$.

On a montré que $\forall -k \leqslant \lambda \leqslant k, u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) = \lambda$. De plus, $\forall k \in \mathbb{N}, u^*_{x_k} \in S_{Y^*}$.
Par compacité préfaible de B_{Y^*}, quitte à extraire il existe $u^*_x \in S_{Y^*}$ tel que $\left(u^*_{x_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge préfaiblement vers u^*_x.
Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant K, \lambda \in [-k,k]$. Alors,

$$\forall k \geqslant K, u^*_{x_k} \circ f(\lambda x) = \lambda$$

Ainsi,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, u^*_x \circ f(\lambda x) = \lambda, \text{ et } \|u^*_x\| = 1$$

2. Soit x un point lisse de E de norme 1. Notons v^*_x la différentielle de $\|.\|$ en x.

Montrons que $v^*_x \in S_{E^*}$:
- Soit $h \in E$ fixé, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

$$\begin{aligned} \|x + th\| &= \|x\| + tv^*_x(h) + o(|h|) \\ &= 1 + tv^*_x(h) + o(|h|) \end{aligned}$$

De plus, $\|x + th\| \leqslant \|x\| + |t|\,\|h\| = 1 + |t|\,\|h\|$. Donc,

$$\forall h \in E, 1 + tv^*_x(h) + o(|t|) \leqslant 1 + |t|\,\|h\|$$

D'où $v^*_x(h) + \varepsilon(t) \leqslant \|h\|$. Et en faisant tendre t vers 0 : $v^*_x(h) \leqslant \|h\|, \forall h \in E$.
Ainsi $\|v^*_x\| \leqslant 1$.

· en $h = x$:

$$\|x + th\| \quad = \quad \|x(1+t)\| = 1 + t = 1 + tv_x^*(x) + o(t), \forall t$$

Donc $v_x^*(x) = 1$ et $\|v_x^*\| = 1$.

Montrons que $u_x^* \circ f = v_x^*$:

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u_x^* \circ f(\lambda x) = \lambda$ et $v_x^*(\lambda x) = \lambda v_x^*(x) = \lambda$.

En fait, on va montrer que v_x^* est l'unique fonction 1-lipschitzienne φ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(tx) = t$

Procédons par l'absurde en supposant qu'il existe $y \in E$ tel que $u_x^* \circ f(y) \neq v_x^*(y)$.

$$v_x^*(y - u_x^* \circ f(y)x) = v_x^*(y) - u_x^* \circ f(y)v_x^*(x) = v_x^*(y) - u_x^* \circ f(y) \neq 0$$

car on a vu que $v_x^*(x) = 1$.

D'où $\omega = y - u_x^* \circ f(y)x \notin Ker\ v_x^*$

Alors, pour $|t|$ assez petit et tel que $tv_x^*(\omega) > 0$,

$$\|x - tw\| = \|x\| - tv_x^*(\omega) + o(|t|) = 1 - tv_x^*(\omega) + o(|t|) < 1$$

Donc $\left\|\frac{x}{t} - \omega\right\| < \frac{1}{|t|}$. De plus, rappelons que $v_x^* \circ f$ est 1-lipschitzienne. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|t|} &= \left|u_x^* \circ f(y) - \left(u_x^* \circ f(y) + \frac{1}{|t|}\right)\right| = \left|u_x^* \circ f(y) - u_x^* \circ f\left((u_x^* \circ f(y) + \frac{1}{|t|})x\right)\right| \\ &\leqslant \left\|y - \left(u_x^* \circ f(y) + \frac{1}{|t|}\right)x\right\| = \left\|(y - u_x^* \circ f(y)x) - \frac{1}{|t|}x\right\| = \left\|w - \frac{x}{t}\right\| < \frac{1}{|t|} \end{aligned}$$

D'où une contradiction, et donc pour tout $y \in E$, $u_x^* \circ f(y) = v_x^*(y)$. C'est à dire, $u_x^* \circ f = v_x^*$.

3. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right\|_Y &= \sup_{u^* \in S_{E^*}} \left\langle u^*, \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right\rangle \geqslant \sup_{x \in S_E, x \text{ point lisse}} \left\langle u_x^*, \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right\rangle \\ &\geqslant \sup_{x \in S_E, x \text{ point lisse}} \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle u_x^*, f(x_i)\rangle = \sup_{x \in S_E, x \text{ point lisse}} \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_x^*, x_i\rangle \\ &\geqslant \sup_{x \in S_E, x \text{ point lisse}} \left\langle v_x^*, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\rangle \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.2 les points lisses sont denses dans S_E, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x points lisse $\|x\| = 1$ tel que $\left\|x - \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\|}\right\| \leqslant \varepsilon$. Comme $v_x^*(x) = 1$ et $v_x^* \in S_{E^*}$, on a

$$\varepsilon \geqslant 1 \cdot \left\|x - \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\|}\right\| \geqslant \left\langle v_x^*, x - \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\|}\right\rangle = 1 - \left\langle v_x^*, \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\|}\right\rangle$$

D'où $\left\langle v_x^*, \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\rangle \geqslant (1-\varepsilon) \left\| \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|$ et donc

$$\sup_{x \in S_E, x\text{point lisse}} \left\langle v_x^*, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\rangle \geqslant (1-\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|_X$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right\|_Y \geqslant \sup_{x \in S_E, x \text{ point lisse}} \left\langle v_x^*, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\rangle \geqslant \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|_X$$

□

3 Les espaces Lipschitz-libres et le Théorème de Godefroy-Kalton

En 2003, N.J. Kalton et G. Godefroy ont publié [3], article dans lequel ils présentent l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique et utilisent certaines de ses propriétés afin de montrer des résultats sur l'espace métrique. Par exemple on montrera que si Q est une application linéaire surjective à valeurs dans un espace de Banach séparable telle que Q admette un inverse à droite Lipschitzien L, alors Q admet un inverse à droite linéaire de même norme que L.

3.1 Définition des espaces Lipschitz-libres

Soit (M, d) un espace métrique. On considère l'espace $Lip_0(M)$ des fonctions f définies sur M, à valeurs dans $\mathbb{R}$, Lipschitziennes et telles que $f(0) = 0$. Munissons cet espace de la norme suivante :

$$\forall f \in Lip_0(M), \|f\|_{lip} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$$

Remarquons que ceci correspond à la constante de Lipschitz de la fonction.

Proposition 3.1 *L'espace $(Lip_0(M), \|.\|_{lip})$ est un espace de Banach.*

Preuve :

1. $\|.\|_{lip}$ est une norme :
   · Pour tout $f \in Lip_0(M)$, $\|f\|_{lip} \geqslant 0$
   · Soit $f \in Lip_0(M)$

$$\|f\|_{lip} = 0 \Leftrightarrow \forall x \neq y \in M, \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \forall x, y \in M, f(x) = f(y)$$

   c'est à dire f est constante sur M. Or $f(0) = 0$, donc $f \equiv 0$.

· Soient $f, g \in Lip_0(M)$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{lip} &= \sup\left\{\frac{|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)|}{d(x,y)}, x \neq y\right\} \\
&\leqslant \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|}{d(x,y)}, x \neq y\right\} \\
&\leqslant \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}, x \neq y\right\} + \sup\left\{\frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)}, x \neq y\right\} \\
&= \|f\|_{lip} + \|g\|_{lip}
\end{aligned}$$

· Soit $f \in Lip_0(M)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{lip} &= \sup\left\{\frac{|\lambda f(x)-\lambda f(y)|}{d(x,y)}, x \neq y\right\} = |\lambda| \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}, x \neq y\right\} \\
&= |\lambda| \, \|f\|_{lip}
\end{aligned}$$

2. Donc $(Lip_0(M), \|.\|_{lip})$ est un espace vectoriel normé.
3. Montrons qu'il est complet :
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $Lip_0(M)$: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geqslant N$, $\|f_p - f_q\|_{lip} \leqslant \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\|f_p - f_q\|_{lip} &= \sup\left\{\frac{|f_p(x)-f_q(x)-f_p(y)+f_q(y)|}{d(x,y)}, x \neq y\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{|(f_p(x)-f_p(y))-(f_q(x)-f_q(y))|}{d(x,y)}, x \neq y\right\} \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x, y \in M$, $(f_p(x)-f_p(y))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle converge. Soit $f(x) - f(y)$ sa limite.
   Pour tout $x \in M$, on considère $(f_p(x)-f_p(0))_{p\in\mathbb{N}} = (f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$. Cette suite converge vers $f(x)$.
   On définit l'application $\overline{f} : M \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in M, \overline{f}(x) = f(x)$. Montrons que $\overline{f} \in Lip_0(M)$:
   · $\overline{f}(0) = f(0) = \lim\limits_{p\to+\infty} f_p(0) = 0$.
   · Soient $x, y \in M$

$$\begin{aligned}
|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| &= |f(x)-f(y)| = \lim_{p\to+\infty} |f_p(x)-f_p(y)| \leqslant \lim_{p\to+\infty} \|f_p\|_{lip} d(x,y) \\
&= Cd(x,y)
\end{aligned}$$

   En effet, $|\,\|f_p\|_{lip} - \|f_q\|_{lip}\,| \leqslant \|f_p - f_q\|_{lip} \leqslant \varepsilon$ donc $(\|f_p\|_{lip})_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers $C \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, $\overline{f} \in Lip_0(M)$.
   $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{f}$:
   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N, \|f_p - f_q\|_{lip} \leqslant \varepsilon$.
   Soit $n \geqslant N$, alors $\|f_n - f\|_{lip} = \lim\limits_{q\to+\infty} \|f_n - f_q\|_{lip}$. Pour $q \geqslant N, \|f_n - f_q\|_{lip} \leqslant \varepsilon$.
   Donc $\|f_n - f\|_{lip} \leqslant \varepsilon$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f.

Finalement, on a montré que $(Lip_0(M), \|.\|_{lip})$ est un espace de Banach.

□

Pour $x \in M$, on définit la fonction $\delta_x : Lip_0(M) \to \mathbb{R}$ par

$$\forall f \in Lip_0(M), \delta_x(f) = f(x)$$

Alors $\delta_x \in Lip_0(M)^*$ et $|\delta_x(f)| \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_{lip} \, d(x,0)$.

De plus, $\delta_M : \begin{array}{ccc} M & \to & Lip_0(M)* \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$ est une isométrie (non linéaire car M n'a pas de structure linéaire) :

Soient $x, y \in M$ et $f \in Lip_0(M)$. Alors $|(\delta_x - \delta_y)(f)| = |f(x) - f(y)| \leqslant \|f\|_{lip} \, d(x,y)$, d'où $\|\delta_x - \delta_y\|_{lip} \leqslant d(x,y)$.
Considérons la fonction définie par $\forall z \in M, f(z) = d(z,y) - d(y,0)$. Alors f est 1-Lipschitzienne et $f(0) = d(0,y) - d(y,0) = 0$ donc $f \in Lip_0(M)$. De plus,

$$|(\delta_x - \delta_y)(f)| = |d(x,y) - d(y,y)| = d(x,y)$$

Ainsi, $\|\delta_x - \delta_y\|_{Lip_0(M)^*} = d(x,y)$ et δ est une isométrie.

Définition 3.2 *Soit M un espace métrique, on définit $\mathcal{F}(M)$ l'espace Lipschitz-libre sur M par $\mathcal{F}(M) = \overline{vect}\{\delta_x, x \in M\} \subset Lip_0(M)^*$.*

Proposition 3.3 *Le dual de $\mathcal{F}(M)$ est isométrique à $Lip_0(M)$.*

Preuve : Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} J : Lip_0(M) & \to & \mathcal{F}(M)^* \\ f & \mapsto & Jf \end{array}$$

où Jf est définie sur $vect\{\delta_x, x \in M\}$ par : $\forall \mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}, Jf(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$, puis prolonger par continuité à l'adhérence $\mathcal{F}(M)$.

Montrons que J est une isométrie surjective :

- J isométrie :
  Soit $f \in Lip_0(M)$. Pour $\mu \in \mathcal{F}(M)$, $|Jf(\mu)| = |\mu(f)| \leqslant \|\mu\|_{Lip_0(M)^*} \|f\|_{lip}$, on en déduit que $\|Jf\|_{\mathcal{F}(M)^*} \leqslant \|f\|_{lip}$.
  Pour $x \neq y$, soit $\mu = \dfrac{\delta_x - \delta_y}{d(x,y)}$, alors comme δ est une isométrie, $\|\mu\|_{Lip_0(M)^*} = 1$. De plus, $|Jf(\mu)| = \left|\dfrac{f(x) - f(y)}{f(x,y)}\right|$ donc pour tout $x \neq y, \|Jf\|_{Lip_0(M)^*} \geqslant \left|\dfrac{f(x) - f(y)}{d(x,y)}\right|$.
  Par passage au supremum, $\|Jf\|_{Lip_0(M)^*} \geqslant \|f\|_{lip}$. D'où $\|Jf\|_{Lip_0(M)^*} = \|f\|_{lip}$ et J est une isométrie.
- J surjective :
  Soit $\varphi \in \mathcal{F}(M)^*$. Alors φ est déterminée par $\varphi(\delta_x), \forall x \in M$. Posons, pour tout $x \in M, f(x) = \varphi(\delta_x)$ et montrons que $f \in Lip_0(M)$:
  $f(0) = \varphi(\delta_0) = \varphi(0) = 0$

Soient $x, y \in M$,

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(y)| & = & |\varphi(\delta_x) - \varphi(\delta_y)| = |\varphi(\delta_x - \delta_y)| \\ & \leqslant & \|\varphi\|_{\mathcal{F}(M)^*} \|\delta_x - \delta_y\|_{Lip_0(M)^*} = \|\varphi\|_{\mathcal{F}(M)^*} d(x,y) \end{array}$$

Donc $f \in Lip_0(M)$.

Montrons que $Jf = \varphi$:
Soit $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i} \in vect\{\delta_x, x \in M\}$. Alors
$\varphi(\mu) = \varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\delta_{x_i}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$ et $Jf(\mu) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \varphi(\mu)$
Donc $Jf = \varphi$ et J est une isométrie surjective.
Ainsi on a montré que $\mathcal{F}(M)^* \equiv Lip_0(M)$.

□

Exemple 3.4 $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv L_1(\mathbb{R})$

Preuve :

1. Montrons que $Lip_0(\mathbb{R}) \equiv L_\infty(\mathbb{R})$:

   Remarque 3.5 *On montrera plus tard (Proposition 3.24) que toute fonction Lipschitzienne est dérivable presque partout.*

   Soit alors $T : \begin{array}{ccc} Lip_0(\mathbb{R}) & \to & L_\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$

   · Montrons que T est une isométrie. Soit $f \in Lip_0(\mathbb{R})$.
   $\|f'\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant \|f\|_{lip}$
   Ainsi, $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_{lip}$.
   De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) - f(y) = \int_x^y f'(t)\ dt$$
   Alors,
   $$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|\ \|f'\|_\infty$$
   D'où $\|f\|_{lip} \leqslant \|f'\|_\infty$.
   Et donc $\|f\|_{lip} = \|f'\|_\infty$. C'est-à-dire que T est une isométrie.

   · Montrons que T est surjective :
   Soit $g \in L_\infty(\mathbb{R})$. Posons
   $$f(x) = \int_0^x g(t)dt$$
   Alors, $f \in Lip_0(\mathbb{R})$:
   $f(0) = 0$
   Soient $x > y \in \mathbb{R}$,
   $$|f(x) - f(y)| = \left|\int_y^x g(t)dt\right| \leqslant \|g\|_\infty |x - y|$$
   De plus, Tf=g.

   Finalement, $\mathcal{F}(\mathbb{R})^* = Lip_0(\mathbb{R}) \equiv L_\infty(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})^*$.
   Mais cela ne signifie pas que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv L_1(\mathbb{R})$.

· T est injective car c'est une isométrie.

Finalement, T est bijective et son inverse $T^{-1} : \begin{array}{ccc} L_\infty(\mathbb{R}) & \to & Lip_0(\mathbb{R}) \\ g & \mapsto & \left(x \mapsto \int_0^x g(t)dt\right) \end{array}$ est linéaire continue.

Définissons $S : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to L_1(\mathbb{R})$ par : $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}, \alpha_1, ...\alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$S\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{[0,x_i]}$$

Vérifions que $S^* = T^{-1}$:
il suffit de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, < S\delta_x, g >_{L_1,L_\infty} = < \delta_x, T^{-1}g >_{\mathcal{F}(\mathbb{R}),Lip_0(\mathbb{R})}$
Soit alors $x \in \mathbb{R}$,

$$< S\delta_x, g >_{L_1,L_\infty} = < 1_{[0,x]}, g >_{L_1,L_\infty} = \int_0^x g(t)\ dt = < \delta_x, T^{-1}g >_{\mathcal{F}(\mathbb{R}),Lip_0(\mathbb{R})}$$

Donc S est bien l'adjoint de T^{-1}.

Montrons que S est une isométrie :
Remarquons que $S(0) = 0$, donc il suffit de montrer que pour tout $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}$,

$$\left\|S\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}\right)\right\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}\right\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$$

Soit alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i} \in vect\{\delta_x, x \in X\}$,

$$\begin{aligned}
\left\|S\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}\right)\right\|_1 &= \sup_{g \in L_\infty, \|g\|=1} \left\langle S\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}\right), g\right\rangle_{L_1,L_\infty} \\
&= \sup_{g \in L_\infty, \|g\|=1} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}, T^{-1}g\right\rangle_{\mathcal{F}(\mathbb{R}),Lip_0(\mathbb{R})} \\
&= \sup_{f \in Lip_0(\mathbb{R}), \|f\|=1} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}, f\right\rangle_{\mathcal{F}(\mathbb{R}),Lip_0(\mathbb{R})} \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}\right\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Ainsi, S est une isométrie linéaire de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ sur $L_1(\mathbb{R})$.

□

3.2 Propriété de relèvement

Lemme 3.6 *Soient X et Y deux espaces de Banach. Si $T : Y^* \to X^*$ est un opérateur $w^* - w^*$-continue, alors il existe un opérateur $S : X \to Y$ tel que $T = S^*$.*

Preuve : Soit $T^* : X^{**} \to Y^{**}$ l'adjoint de T et $S = T^*_{|X} : X \to Y^{**}$.

1. Commençons par montrer que pour tout $x \in X, Sx \in Y^{**}$ est w^*-continue sur Y^*.
   Soient $y^* \in Y^*$ et $\varepsilon > 0$. Comme T est $w^* - w^*$-continue, il existe $V \in \mathcal{V}_{\sigma(Y^*,Y)}(y^*)$ tel que $\forall z^* \in V, Tz^* \in \{u^* \in X^* : |< x, u^* - Ty^* >| < \varepsilon\}$.
   Ainsi, $|< Sx, z^* - y^* >| = |< x, Tz^* - Ty^* >| < \varepsilon$ et $Sx \in Y^{**}$ est w^*-continue sur Y^*.
2. Montrons maintenant que si $y^{**} \in Y^{**}$ est $\sigma(Y^*, Y)$-continue, alors $y^{**} \in Y$:
   Soit $\delta > 0$. Comme y^{**} est $\sigma(Y^*, Y)$-continue, il existe $y_1, ..., y_n \in Y, \varepsilon > 0$ tels que
   $$y^* \in V_{0;y_1,...y_n;\varepsilon} \Rightarrow |< y^{**}, y^* >| < \delta$$
   En particulier, si $y^* \in \bigcap_{i=1}^{n} Ker\ y_i$ alors $y^{**}(y^*) < \delta$. y^{**} est donc bornée sur $\bigcap_{i=1}^{n} Ker\ y_i$, on en déduit qu'elle est nulle sur $\bigcap_{i=1}^{n} Ker\ y_i$.
   C'est à dire $\bigcap_{i=1}^{n} Ker\ y_i \subset Ker\ y^{**}$. Finalement, $y^{**} \in vect\{y_i, i \leqslant n\} \subset Y$.
3. On a montré que $T^*_{|X} : X \to Y$. Montrons que $S^* = T$:
   Soient $x \in X$ et $y \in Y^*$. Alors $< Sx, y >_{Y,Y^*} = < T^*x, y >_{Y^{**},Y^*} = < x, Ty >_{X,X^*}$.
   Donc T est l'adjoint de S.

□

Proposition 3.7 *Soient (M, d) et (N, d') deux espaces métriques. Soit $L : M \to N$ une application Lipschitzienne telle que $L(0) = 0$. Alors il existe une unique application linéaire $\hat{L} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ telle que $\hat{L}\delta_M = \delta_N L$.*
De plus, $||\hat{L}|| = \|L\|_{lip}$.

Preuve : Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} L^{\#} : Lip_0(N) = \mathcal{F}(N)^* & \to & \mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M) \\ F & \mapsto & F \circ L \end{array}$$

1. Montrons que $\left\|L^{\#}\right\| = \|L\|_{lip}$:
   $$\left\|L^{\#}\right\| = \sup_{F \in Lip_0(N), \|F\|_{lip}=1} \|F \circ L\|_{lip} \leqslant \|L\|_{lip}$$
   Donc $||L^{\#}|| \leqslant \|L\|_{lip}$.
   Soit $x \neq y \in M$. Définissons l'application
   $$\begin{array}{rcl} F : N & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & d'(z, L(y)) - d'(0, L(y)) \end{array}$$
   Alors F est 1-Lipschitzienne et $F(0) = 0$, donc $F \in Lip_0(N)$.
   De plus,
   $$\begin{array}{rcl} \left\|L^{\#}F\right\|_{lip} & = & \|F \circ L\|_{lip} = \sup_{z \neq t \in M} \dfrac{|F \circ L(z) - F \circ L(t)|}{d(z,t)} \\ & \geqslant & \dfrac{|F \circ L(x) - F \circ L(y)|}{d(x,y)} = \dfrac{d'(L(x), L(y))}{d(x,y)} \end{array}$$

Ainsi, pour tout $x, y \in M, x \neq y, \left\|L^{\#}\right\| \geqslant \dfrac{d'(L(x), L(y))}{d(x,y)}$.

D'où par passage au sup : $\left\|L^{\#}\right\| \geqslant \|L\|_{lip}$.

Donc $||L^{\#}|| = \|L\|_{lip}$.

2. Montrons que $L^{\#}$ est l'adjoint d'un opérateur $\hat{L} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N) : \hat{L}^* = L^{\#}$
   Grâce au lemme précédent, il suffit de montrer que $L^{\#}$ est $w^* - w^*$ continue.
   Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Lip_0(N)$ une suite convergeant préfaiblement vers $F \in Lip_0(N)$. C'est à dire $\forall y \in N, (F_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(y)$, ou encore $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers F.
   Montrons que $F_n \circ L$ converge préfaiblement vers $F \circ L$:
   Pour tout $x \in M$, $L(x) \in N$ et $F_n \circ L(x) = F_n(Lx) \to F(Lx) = F \circ L(x)$. Donc $(F_n \circ L)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $F \circ L$. Autrement dit, $(L^{\#}(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge préfaiblement vers $L^{\#}(F)$.
   Ainsi, $L^{\#}$ est $w^* - w^*$ continue donc il existe $\hat{L} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ tel que $L^{\#} = \hat{L}^*$.
3. On a vu que $||L^{\#}|| = \|L\|_{lip}$. De plus, $\hat{L}$ est l'adjoint de $L^{\#}$, donc $||\hat{L}|| = ||L^{\#}||$. D'où $||\hat{L}|| = \|L\|_{lip}$.
4. Montrons que $\hat{L}\delta_M = \delta_N L$:
   Soit $x \in M$. On veut montrer que $\hat{L}\delta_x = \delta_N L(x)$. Soit $F \in Lip_0(N) = \mathcal{F}(N)^*$.
$$\begin{aligned} \hat{L}\delta_x(F) &= \left\langle \hat{L}\delta_x, F \right\rangle = \langle \delta_x, F \circ L \rangle = F \circ L(x) \\ \delta_N L(x)(F) &= \delta_{L(x)}(F) = F(L(x)) = F \circ L(x) \end{aligned}$$
   Ainsi, $\hat{L}\delta_x = \delta_N L(x) \forall x \in M$ et donc $\hat{L}\delta_M = \delta_N L$.
5. Cette égalité permet de montrer l'unicité de $\hat{L}$. En effet, $\forall \mu \in vect\{\delta_x, x \in M\}, \hat{L}\delta_x$ est définie de manière unique par $\delta_N L(x)$. De plus, $\mathcal{F}(M) = \overline{vect}\{\delta_x, x \in M\}$.

□

Soit maintenant X un espace de Banach.

Considérons l'application β_X définie sur $vect\{\delta_x, x \in X\}$ par :

$$\forall \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} \in vect\{\delta_x, x \in X\}, \ \beta_X\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Soit $x^* \in X^* \subset Lip_0(X)$ avec $\|x^*\|$ sa constante de Lipschitz. Alors on a

$$\left\langle \beta_X\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}\right), x^* \right\rangle_{X,X*} = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x^* \right\rangle_{X,X^*} = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}, x^* \right\rangle_{\mathcal{F}(X),Lip_0(X)}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach,

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right\|_X &= \sup_{x^* \in S_{X^*}} \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x^* \right\rangle_{X,X^*} \\ &\leqslant \sup_{f \in S_{Lip_0(X)}} \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}, f \right\rangle_{\mathcal{F}(X),Lip_0(X)} = \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}\right\|_{\mathcal{F}(X)} \end{aligned}$$

Donc $\|\beta_X\| \leqslant 1$.

De plus, soit $x \in X$. Alors $\beta_X(\delta_x) = x$ et donc $\|\beta_X(\delta_x)\|_X = \|x\|_X = \|\delta_x\|_{\mathcal{F}(X)}$. D'où $\|\beta_X\| \geqslant 1$.

Finalement, $\|\beta_X\| = 1$ et on peut l'étendre en une application linéaire bornée :

$$\beta : \mathcal{F}(X) \to X$$

Lemme 3.8 *β_X est une application quotient de $\mathcal{F}(X)$ dans X et son inverse à droite est δ_X :*

$$\beta_X \delta_X = Id_X$$

Définition 3.9 *Une application quotient est une application linéaire continue surjective.*

Preuve : β_X est un opérateur linéaire borné comme prolongement d'un opérateur linéaire borné. De plus, par définition de β_X, pour tout $x \in X, \beta_X(\delta_X(x)) = \beta_X(\delta_x) = x$ donc β_X est suriectif et son inverse à droite est δ_X.

□

Proposition 3.10 *Soient X et Y deux espaces de Banach et $L : X \to Y$ une application Lipschitzienne telle que $L(0) = 0$. Alors il existe une unique application $\overline{L} : \mathcal{F}(X) \to Y$ linéaire telle que $\overline{L}\delta_X = L$ et $||\overline{L}|| = \|L\|_{lip}$.*

Preuve : D'après la Proposition 3.7, il existe une unique application $\hat{L} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ linéaire telle que $\hat{L}\delta_X = \delta_Y L$ et $||\hat{L}|| = \|L\|_{lip}$.

Posons $\overline{L} = \beta_Y \hat{L}$. Remarquons que $\overline{L}$ est bien linéaire. De plus, comme $\beta_Y \delta_Y = Id_Y$: $\overline{L}\delta_X = \beta_Y \hat{L}\delta_X = \beta_Y \delta_Y L = Id_Y L = L$.

Rappelons que β_Y est un opérateur de norme inférieure ou égale à 1, d'où

$$||\overline{L}|| = ||\beta_Y \hat{L}|| \leqslant ||\hat{L}|| = \|L\|_{lip}$$

Soient $x \neq x' \in X$. Comme δ_X est une isométrie, $\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\| = \|x - x'\|$. De plus, $\overline{L}(\delta_X(x) - \delta_X(x')) = L(x) - L(x')$. Ainsi,

$$||\overline{L}|| \geqslant \frac{\left\|\overline{L}(\delta_X(x)) - \overline{L}(\delta_X(x'))\right\|}{\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|} = \frac{\|L(x) - L(x')\|}{\|x - x'\|}$$

C'est à dire que pour tout $x \neq x', \|L(x) - L(x')\| \leqslant ||\overline{L}|| \, \|x - x'\|$. Donc $\|L\| \leqslant ||\overline{L}||$ et finalement, $\|L\| = ||\overline{L}||$.

□

Quelques rappels sur les suites exactes :

Rappelons que $0 \to Z \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{S} X \to 0$ est une suite exacte lorsque R est injective, S est surjective et $Im(R) = Ker(S)$.

On dit qu'une suite exacte est scindée s'il existe une application linéaire continue $V : X \to Y$ telle que $SV = Id_X$.

Définition 3.11 *On dit qu'une suite exacte est Lipschitz-scindée s'il existe une application Lipschitzienne (non nécessairement linéaire) $L : X \to Y$ telle que $SL = Id_X$.*

Remarquons que l'on peut toujours supposer $L(0) = 0$.

Soit $Z_X = \beta_X^{-1}(\{0\})$ le noyau de β_X.
On peut réinterpréter le Lemme 3.8 de la manière suivante :

Lemme 3.12 *La suite exacte* $0 \to Z_X \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\beta} X \to 0$ *est Lipschitz-scindée.*

Preuve : La surjectivité de β_X et la définition de Z_X sont équivalents au fait que la suite soit exacte. De plus on a montré que δ_X est une isométrie donc en particulier δ_X est Lipschitzienne. D'où le résultat.

□

Définition 3.13 *On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de relèvement (isométrique) s'il existe une application linéaire continue (de norme 1) $T : X \to \mathcal{F}(X)$ telle que $\beta_X T = Id_X$.*

Proposition 3.14 *Soit X un espace de Banach. Alors X a la propriété de relèvement si et seulement si toute suite exacte $0 \to Z \to Y \to X \to 0$ qui est Lipschitz-scindée est linéairement scindée.*

Preuve :

$\Leftarrow$ On a vu au Lemme 3.12 que la suite exacte $0 \to Z_X \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\beta} X \to 0$ est Lipschitz-scindée. Par hypothèse elle est donc linéairement scindée. C'est à dire qu'il existe $T : X \to \mathcal{F}(X)$ linéaire continue telle que $\beta_X T = Id_X$.

$\Rightarrow$ Réciproquement, soit $0 \to Z \to Y \xrightarrow{S} X \to 0$ une suite exacte Lipschitz-scindée.
Soit alors $L : X \to Y$ Lipschitzienne telle que $SL = Id_X$.
D'après la Proposition 3.10, il existe $\overline{L} : \mathcal{F}(X) \to Y$ linéaire telle que $\overline{L}\delta_X = L$. Alors, $S\overline{L}\delta_X = SL = Id_X$. Or, d'après le Lemme 3.8, $\beta_X \delta_X = Id_X$, on en déduit que $S\overline{L} = \beta_X$.
De plus, par hypothèse X a la propriété de relèvement, donc il existe $T : X \to \mathcal{F}(X)$ linéaire continue telle que $\beta_X T = Id_X$.
Alors, $\overline{L}T : X \to Y$ est linéaire continue et $S(\overline{L}T) = Id_X$, d'où la suite exacte est linéairement scindée.

□

Corollaire 3.15 *Soient X et Y deux Banach tels que X ait la propriété de relèvement. Soit $Q : Y \to X$ une application quotient.*
S'il existe une isométrie (non nécessairement linéaire) $L : X \to Y$ telle que $QL = Id_X$, alors il existe une isométrie linéaire $V : X \to Y$ telle que $QV = Id_X$.

Preuve : Considérons la suite exacte $0 \to Ker\ Q \hookrightarrow Y \xrightarrow{Q} X \to 0$. Par hypothèse elle est Lipschitz-scindée, donc par la Proposition 3.14, comme X a la propriété de relèvement, cette suite exacte est linéairement scindée. D'où le résultat.

□

Lemme 3.16 *Pour tout X Banach quelconque, $\mathcal{F}(X)$ a la propriété de relèvement.*

Preuve : Considérons l'isométrie $\delta_{\mathcal{F}(X)}\delta_X : X \to \mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$.
Comme $\delta_{\mathcal{F}(X)}\delta_X(0) = \delta_{\mathcal{F}(X)}(0) = \delta_0$, on a $\forall F \in Lip_0(\mathcal{F}(X))$,

$$\delta_{\mathcal{F}(X)}\delta_X(0)(F) = \delta_0(F) = F(0) = 0$$

D'après la Proposition 3.10, il existe une unique application $T : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$ linéaire telle que $T\delta_X = \delta_{\mathcal{F}(X)}\delta_X$ et $\|T\| = 1$.

De plus, d'après le Lemme 3.8, $\beta_{\mathcal{F}(X)}\delta_{\mathcal{F}(x)} = Id_{\mathcal{F}(X)}$. Ainsi,

$$\forall x \in X, \beta_{\mathcal{F}(X)}T\delta_X(x) = \beta_{\mathcal{F}(X)}\delta_{\mathcal{F}(X)}\delta_X(x) = \delta_X(x)$$

Finalement, $\beta_{\mathcal{F}(X)}T = Id_{\mathcal{F}(X)}$.

□

Théorème 3.17 *Soit X un espace de Banach. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. X a la propriété de relèvement

ii. Si Y est un Banach tel qu'il existe $L : X \to Y$ isométrie (non nécessairement linéaire) avec $L(0) = 0$ et $Y = \overline{vect} L(X)$, alors Y contient un sous-espace complémenté linéairement isométrique à X.

Preuve :

$\Rightarrow$ Supposons que X ait la propriété de relèvement. Soit Y un Banach tel qu'il existe $L : X \to Y$ isométrie (non nécessairement linéaire) avec $L(0) = 0$ et $Y = \overline{vect} L(X)$.
D'après le Théorème 2.5 de Figiel, il existe une application linéaire continue

$$Q : Y = \overline{vect}\ L(X) \to X$$

telle que $\|Q\| \leqslant 1$ et $\forall x \in X, Q \circ L(x) = x$. En particulier, Q est surjective.
On peut donc appliquer le Corollaire 3.15 :
il existe une isométrie linéaire $V : X \to Y$ telle que $QV = Id_X$. En particulier, V est injective et donc il existe un sous-espace Y_1 de Y tel que X soit linéairement isométrique à Y_1.
Définissons $P = VQ : Y \to Y$ et vérifions que P est une projection continue sur Y_1.

· $P(Y) = V(X) = Y_1$ et comme $QV = Id_X$, on a

$$P^2 = VQVQ = V\ Id_X\ Q = VQ = P$$

Donc P est une projection sur Y_1.

· $\|P\| \leqslant \|V\|\,\|Q\| \leqslant 1$ donc P est continue.

Finalement, Y_1 est un sous-espace complémenté et X est linéairement isométrique à un sous-espace complémenté de Y.

$\Leftarrow$ Réciproquement, considérons $Y = \mathcal{F}(X)$ et vérifions que Y satisfait les hypothèses :
$\delta_X : X \to \mathcal{F}(X)$ est une isométrie et $\delta_X(0) = 0$.
De plus, $Y = \mathcal{F}(X) = \overline{vect}\ \{\delta_x, x \in X\} = \overline{vect}\ \delta_X(X)$.
$Y = \mathcal{F}(X)$ satisfait les hypothèses, donc il existe $Y_1 \subset Y$ un sous-espace complémenté linéairement isométrique à X.
On a vu au Lemme 3.16 que $\mathcal{F}(X)$ a la propriété de relèvement, donc il existe $T : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$ linéaire continue telle que $\beta_{\mathcal{F}(X)}T = Id_{\mathcal{F}(X)}$. Alors $T_{|Y_1}$ est linéaire continue et $\beta_{\mathcal{F}(X)}T_{|Y_1} = Id_{Y_1}$.

□

3.3 Cas des espaces séparables : le théorème de Godefroy-Kalton

3.3.1 Un résultat préliminaire : le théorème de Rademacher

Définition 3.18 *Une fonction $f : I = [a,b] \to \mathbb{C}$ est absolument continue sur I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute famille disjointe d'intervalles de I, $]\alpha_1, \beta_1[, ...,]\alpha_i, \beta_i[, ...,]\alpha_n, \beta_n[$, telle que $\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, on ait $\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$.*

Remarque 3.19 *Si f est absolument continue et $\sum_{i=1}^{+\infty}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$, et donc $\sum_{i=1}^{+\infty} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$.*

Définition 3.20 *Soit $\mathcal{M}$ une tribu, μ une mesure positive sur $\mathcal{M}$ et λ une mesure arbitraire sur $\mathcal{M}$. Si $\lambda(E) = 0$, pour tout $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$, on dit que λ est absolument continue par rapport à μ et on note $\lambda << \mu$.*

Rappelons sans démonstration le théorème de Radon-Nikodym :

Théorème 3.21 *Soient $\mathcal{M}$ une tribu sur X, μ une mesure positive σ-finie sur $\mathcal{M}$ et λ une mesure complexe sur $\mathcal{M}$. Alors*

a) il existe un unique couple (λ_a, λ_s) de mesure complexe sur $\mathcal{M}$ tel que $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a << \mu$ et $\lambda_s \perp \mu$.
Si λ est positive finie, alors λ_a et λ_s le sont aussi et $\lambda_a \perp \lambda_s$.

b) il existe une unique application $h \in L^1(\mu)$ telle que $\forall E \in \mathcal{M}, \lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu$

Théorème 3.22 *Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante absolument continue sur I.*

Alors f est presque partout différentiable sur I.

Preuve : Notons λ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrons tout d'abord que l'image par f d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle :
   Soit $\mathcal{M}$ la tribu de tous les ensembles de $\mathbb{R}$ mesurables pour la mesure de Lebesgues.
   Soit $E \subset I$ tel que $E \in \mathcal{M}$ et $\lambda_1(E) = 0$. On peut supposer que $a, b \notin E$.
   Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé à ε par la définition de l'absolue continuité. Alors il existe un ouvert V tel que $V = \bigcup_{i=1}^{n}]\alpha_i, \beta_i[$, où les $]\alpha_i, \beta_i[$ sont disjoints, $E \subset V \subset I$ et $\lambda_1(V) < \delta$. C'est à dire $\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, donc $\sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) - f(\alpha_i) < \varepsilon$.
   Or, $E \subset V$, donc $f(E) \subset f(V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} [f(\alpha_i) - f(\beta_i)]$. De plus,
   $$\lambda_1 \left(\bigcup_{i=1}^{n} [f(\alpha_i) - f(\beta_i)] \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) - f(\alpha_i)$$
   donc $f(E) \in \mathcal{M}$ et $\lambda_1(f(E)) = 0$.

2. Montrons maintenant que f est différentiable presque-partout :
   Soit g la fonction injective définie par $\forall x \in [a,b], g(x) = x + f(x)$.
   Si $J \subset I$ est un intervalle de longueur η et $f(J)$ est un intervalle de longueur η', alors $g(J)$ est de longueur $\eta+\eta'$. Donc l'image par g d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle :
   Si J est un intervalle, $\lambda_1(J) = 0 \Rightarrow \lambda_1(f(J)) = 0 \Rightarrow \lambda_1(g(J)) = 0+0 = 0$.
   Si J est un ensemble quelconque, on a le résultat par régularité de λ_1.

   Soit $E \subset I, E \in \mathcal{M}$. Alors $E = E_1 \cup E_0$, où $E_0 \cap E_1 = \emptyset$, $m(E_0) = 0$ et E_1 est un F_σ. C'est à dire que E_1 est une réunion dénombrable de compacts. Comme g est continue, $g(E_1)$, est une réunion dénombrable de compacts.
   On a montré que l'image par g d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle, donc $\lambda_1(g(E_0)) = 0$.
   De plus, $g(E) = g(E_1) \cup g(E_0)$ donc $g(E) \in \mathcal{M}$.
   Définissons $\mu(E) = \lambda_1(g(E))$.
   Remarquons que comme g est injective, pour tout $J_1, J_2 \subset I$ tels que $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, on a $g(J_1) \cap g(J_2) = \emptyset$.

   Montrons que μ est une mesure positive et bornée sur $\mathcal{M}$:
   · Comme λ_1 est une mesure, $\mu(\emptyset) = \lambda_1(g(\emptyset)) = \lambda_1(\emptyset) = 0$.
   · Soit une suite $(A_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ telle que $\forall n \neq m, A_n \cap A_M = \emptyset$. Alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \lambda_1\left(g(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n)\right) \overset{i}{=} \lambda_1\left(\bigcup_{n\geqslant 1} g(A_n)\right) \overset{ii}{=} \sum_{n\geqslant 1} \lambda_1\left(g(A_n)\right) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n)$$

   où i provient du fait que g est injective et ii est justifiée car λ_1 est une mesure
   Ainsi μ est une mesure positive.
   · $\mu(I) = \lambda_1(g(I)) = \lambda_1(I) + \lambda_1(f(I)) < +\infty$ car f est continue sur I compact.
   Ainsi, μ est une mesure positive bornée.

   Montrons que μ est absolument continue par rapport à λ_1 :
   Soit $E \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda_1(E) = 0$. Alors on a montré que $\lambda_1(g(E)) = 0$, donc $\mu(E) = 0$.

   En résumé, λ_1 est une mesure positive finie, μ une mesure. Donc d'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe un unique couple (μ_a, μ_s) tel que $\mu = \mu_a + \mu_s$, $\mu_a << \lambda_1$ et $\mu_s \perp \lambda_1$. Or, $\mu << \lambda_1$, donc $\mu_a = \mu$ et $\mu_s = 0$.
   Ainsi, il existe un unique $h \in L^1(\lambda_1)$ telle que $\forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) = \int_E h \, d\lambda_1$.

   Soit $x \in I$. Pour $E = [a,x]$, $g(E) = [g(a), g(x)]$ et

$$\begin{aligned} g(x) - g(a) &= \lambda_1(g(E)) = \mu(E) = \int_a^x h(t)\, dt \\ g(x) - g(a) &= f(x) - f(a) + x - a \end{aligned}$$

   Ainsi, $f(x) - f(a) = \int_a^x (h(t) - 1) dt$. Et donc f est dérivable presque partout.

□

Proposition 3.23 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne. Alors f est absolument continue.*

Preuve : Notons L la constante de Lipschitz de f.
Soit $\varepsilon > 0$ et $(]\alpha_i, \beta_i[)_{i \leqslant n}$ une famille disjointe telle que $\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{L}$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} L(\beta_i - \alpha_i) < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

C'est-à-dire f est absolument continue.

□

Proposition 3.24 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne. Alors f est dérivable presque partout.*

Preuve : Notons L la constante de Lipschitz de f.
On écrit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) - h(x)$, où $g(x) = Lx + f(x)$ et $h(x) = Lx$.

- $\star$ g est dérivable presque partout :
  - $\cdot$ g est continue
  - $\cdot$ g est croissant
    Soit $x \leqslant y$. Alors

    $$g(y) - g(x) = Ly + f(y) - Lx - f(x) = L(y - x) + (f(y) - f(x))$$

    On a $L(y - x) \geqslant 0$ et $|f(y) - f(x)| \leqslant L(y - x)$, donc $g(y) - g(x) \geqslant 0$ et g est croissante.
  - $\cdot$ g est Lipschitzienne
    Soient $x, y \in \mathbb{R}$

    $$|g(x) - g(y)| = |Lx + f(x) - Ly - f(y)| \leqslant L|x - y| + L|x - y| = 2L|x - y|$$

  D'après le Théorème 3.22, g est dérivable presque partout.
- $\star$ h est dérivable partout.
  Finalement, f est dérivable presque partout comme somme de deux fonctions dérivables presque partout.

□

Théorème 3.25 (Rademacher) *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne.*
Alors f est Fréchet-différentiable presque partout.

Avant de démontrer ce Théorème, commençons par quelques résultats utiles :

Lemme 3.26 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne et Gâteaux-différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f est Fréchet-différentiable en x_0.*

Si on démontre ce Lemme, il suffira donc de montrer que f est Gâteaux-différentiable presque partout.

Preuve : Supposons f Gâteaux- différentiable en x_0. Alors il existe $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linéaire bornée telle que $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $Tu = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $(u_i)_{i=1}^{n} \subset S_{\mathbb{R}^n}$ tel que $\forall u \in S_{\mathbb{R}^n}, \exists 0 \leqslant i \leqslant n : \|u_i - u\| < \varepsilon$.
Soit $t_0 > 0$ tel que $|f(x_0 + tu_i) - f(x_0) - tT(u_i)| \leqslant \varepsilon|t|, \forall |t| \leqslant t_0$ et $\forall i \leqslant m$.

Ainsi, pour tout u tel que $\|u\| = 1$,

$$\begin{aligned}
&|f(x_0 + tu) - f(x_0) - tT(u)| \\
&= |f(x_0 + tu) - f(x_0 + tu_i) + f(x_0 + tu_i) - f(x_0) + tT(u_i) - tT(u_i) - tT(u)| \\
&\leqslant L||x_0 + tu - x_0 - tu_i|| + |t|\varepsilon + \|T\| \, \|u_i - u\| \, |t| \leqslant |t|\varepsilon(L + 1 + \|T\|) \\
&\longrightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

Donc f est Fréchet-différentiable en x_0.

$\square$

Lemme 3.27 *Soient X et Y deux Banach et $f : X \to Y$ une application Lipschitzienne. Soit G un sous groupe additif de X dense.*

S'il existe $x_0 \in X$ tel que $\forall u \in G, \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}$ existe et est additive comme fonction de u, alors f est Gâteaux-différentiable en x_0.

Preuve : Soit L la constante de Lipschitz de f.
Pour $t \neq 0$, posons $h_t(u) = \dfrac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}$.
Alors $\{h_t, t \neq 0\}$ est équicontinue. En effet, pour tout t, pour tout $u, v \in G$,

$$\|h_t(u) - h_t(v)\| = \frac{1}{|t|} \|f(x_0 + tu) - f(x_0 + tv)\| \leqslant \frac{1}{|t|} L \, \|tu - tv\| = L \, \|u - v\|$$

donc pour tout t, h_t est Lipschitzienne de constante L.

Comme $\lim\limits_{t\to 0} h_t(u)$ existe pour tout $u \in G$, cette limite existe également pour tout $u \in \overline{G} = X$ et l'additivité des limites sur G implique l'additivité des limites sur X.
De plus,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} h_t(\alpha u) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha u) - f(x_0)}{t} = \lim_{\alpha t\to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha u) - f(x_0)}{t\alpha} \, \alpha \\
&= \lim_{T\to 0} \frac{f(x_0 + Tu) - f(x_0)}{T} \, \alpha = \alpha \lim_{T\to 0} h_T(u)
\end{aligned}$$

Cette limite est donc un opérateur linéaire. De plus cet opérateur est borné par L. Ainsi, $\lim\limits_{t\to 0} h_t = D_f(x_0)$.

$\square$

Lemme 3.28 *Soit W la réunion d'une famille finie de boules ouvertes $B(x_i, r_i)$, avec $1 \leqslant i \leqslant N$. Alors il existe $S \subset \{1, ..., N\}$ tel que*

a) $\forall i \in S$, les boules $B(x_i, r_i)$ sont disjointes

b) $W \subset \bigcup\limits_{i\in S} B(x_i, 3r_i)$

c) $\lambda_n(W) \leqslant 3^n \sum\limits_{i\in S} \lambda_n(B(x_i, r_i))$

Preuve : Commençons par ordonner les boules $B_i = B(x_i, r_i)$ suivant les rayons décroissants $r_1 \leqslant r_2 \leqslant ... \leqslant r_N$.

Posons $i_1 = 1$. On élimine tous les B_j qui intersectent B_{i_1}.

Soit B_{i_2} la première des boules restantes, s'il y en a. On élimine tous les $B_j, j > i_2$, qui intersectent B_{i_2}.

Soit B_{i_3} la première restante.

...

Jusqu'à épuisement (au départ on a un nombre fini de B_i).

On obtient alors un ensemble $S = \{i_1, i_2, \cdots, i_{fini}\}$. Vérifions les assertions :

a) $\forall i \in S$, les boules $B(x_i, r_i)$ sont disjointes par construction.

b) $W \subset \bigcup\limits_{i \in S} B(x_i, 3r_i)$

Pour toute boule B_j éliminée, il existe $i \in S$ telle que $B_j \subset B(x_i, 3r_i)$.

En effet, si $r' < r$ et $B(x', r') \cap B(x, r) \neq \emptyset$, alors $B(x', r') \subset B(x, 3r)$.

c) $\lambda_n(W) \leqslant 3^n \sum\limits_{i \in S} \lambda_n(B(x_i, r_i))$

$$\lambda_n(W) \leqslant \lambda_n\left(\bigcup_{i \in S} B(x_i, 3r_i)\right) \leqslant \sum_{i \in S} \lambda_n(B(x_i, 3r_i)) \leqslant \sum_{i \in S} 3^n \lambda_n(B(x_i, r_i))$$

Car nous sommes sur $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Lemme 3.29 *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(0,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dy = 0$$

Preuve : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, on définit

$$(T_r f)(x) = \frac{1}{\lambda_n(B(0,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| d\lambda_n$$

et

$$(Tf)(x) = \limsup_{r \to 0} \, (T_r f)(x)$$

<u>Montrons que $Tf = 0$ presque partout :</u>

Soit $y > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. f appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ donc par densité, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - g\|_1 < \dfrac{1}{p}$.

Posons $h = f - g$.

· Montrons que $Tg = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Tg(x) = \limsup_{r \to 0} (T_r g)(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(0,r))} \int_{B(x,r)} |g - g(x)| d\lambda_n = 0$$

car comme g est continue : si $y \to x$, alors $g(y) \to g(x)$ et par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\to 0} \quad & \frac{1}{\lambda_n(B(0,r))}\int_{B(x,r)} |g(y)-g(x)| d\lambda_n(y) \\
= \; & \int_{B(x,r)} \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(0,r))} |g(y)-g(x)| d\lambda_n(y) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

· On a, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
T_r(h)(x) &= \frac{1}{\lambda_n(B(0,r))}\int_{B(x,r)} |h-h(x)| \; d\lambda_n \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda_n(B(0,r))}\int_{B(x,r)} |h| \; d\lambda_n + |h(x)| \\
&\leqslant \sup_{0<r<+\infty} \frac{1}{\lambda_n(B(0,r))}\int_{B(x,r)} |h| \; d\lambda_n + |h(x)|
\end{aligned}$$

Donc, en posant $M(h)(x) := \sup_{0<r<+\infty} \frac{1}{\lambda_n(B(0,r))} \int_{B(x,r)} |h| \; d\lambda_n$,

$$T(h)(x) \leqslant M(h)(x) + |h(x)|$$

De plus, $f = h + g$, donc $T_r f \leqslant T_r h + T_r g$. On en déduit $Tf \leqslant Th + Tg$. Et comme $Tg(x) = 0$, alors $Tf \leqslant Th \leqslant M(h) + |h|$.

Ainsi, $\{Tf > 2y\} \subset \{Mh > y\} \bigcup \{|h| > y\} := E(y,p)$.

· Montrons que $\lambda_n(\{Mh > y\}) \leqslant \frac{3^n}{y}\|h\|_1$:

Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
x \in \{Mh(x) > y\} &\iff \sup_{0<r<+\infty} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |h| \; d\lambda_n > y \\
&\iff \exists r > 0 : \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |h| \; d\lambda_n \geqslant y \\
&\iff \exists r > 0 : \lambda_n(B(x,r)) \leqslant \frac{1}{y}\int_{B(x,r)} |h| \; d\lambda_n
\end{aligned}$$

Soit $K \subset \{Mh > y\}$ un compact. Alors pour tout $x \in K$, il existe $r > 0$ tel que

$$\lambda_n(B(x,r)) \leqslant \frac{1}{y}\int_{B(x,r)} |h| \; d\lambda_n$$

Comme K est compact, une réunion finie de $B(x,r)$ recouvre K. D'après le Lemme précédent, une famille finie disjointe de $\{B_1, ..., B_N\}$ recouvre K et

$$\lambda_n(K) \leqslant 3^n \sum_{i=1}^{N} \lambda_n(B_i) \leqslant \frac{3^n}{y}\sum_{i=1}^{N}\int_{B_i} |h| \; d\lambda_n \leqslant \frac{3^n}{y}\|h\|_1 \text{ car les } B_i \text{ sont disjointes}$$

Ainsi, $\lambda_n(\{M(x) > y\}) = \sup_{K \subset \{M(x)>y\}, K compact} \lambda_n(K) \leqslant \frac{3^n}{y} \|h\|_1$.

De plus, $\|h\|_1 = \|f - g\|_1 < \frac{1}{p}$. Donc, $\lambda_n(\{M(x) > y\}) < \frac{3^n}{yp}$.

· Montrons que $\lambda_n(\{|h| > y\}) < \frac{1}{py}$:

$$\begin{aligned} \lambda_n(\{|h| > y\}) &= \lambda_n\left(\left\{\frac{|h|}{y} > 1\right\}\right) = \int_{\{\frac{|h|}{y}>1\}} 1 \; d\lambda_n \\ &\leqslant \int_{\{\frac{|h|}{y}>1\}} \frac{h}{y} \, d\lambda_n \leqslant \frac{1}{y} \|h\|_1 < \frac{1}{py} \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \lambda_n(E(y,p)) &= \lambda_n\left(\{Mh > y\} \bigcup \{|h| > y\}\right) \leqslant \lambda_n\left(\{Mh > y\}\right) + \lambda_n\left(\{|h| > y\}\right) \\ &\leqslant \frac{3^n}{py} + \frac{1}{py} = \frac{3^n + 1}{py} \end{aligned}$$

On a vu que $\{Tf > 2y\} \subset E(y,p)$. De plus, $\{Tf > 2y\}$ ne dépend pas de p, donc $\{Tf > 2y\} \subset \bigcap_{p=1}^{+\infty} E(y,p)$. Et comme $\bigcap_{p=1}^{+\infty} E(y,p)$ est de mesure nulle, $\{Tf > 2y\}$ est négligeable. La mesure de Lebesgue étant complète, $\{Tf > 2y\}$ est mesurable et de mesure nulle.

Finalement, pour tout $y > 0$, $\{Tf > 2y\}$ est de mesure nulle, donc $Tf = 0$ presque partout. Or,

$$Tf(x) = \limsup_{r\to 0} (T_r f)(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| \, d\lambda_n$$

Donc pour presque tout x,

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| \, d\lambda_n = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| \, d\lambda_n = 0$$

□

Passons maintenant à la preuve du théorème de Rademacher :

Preuve : Soit G un sous-groupe dénombrable dense de $(\mathbb{R}^n, +)$, par exemple $G = \mathbb{Q}^n$.

· Montrons que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$ existe pour presque tout x :
Supposons que ce ne soit pas le cas.
Alors il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que :
il existe A de mesure strictement positive et $\forall x \in A, h_u(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$ n'existe pas.
On a $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}u \oplus F$. Pour $\zeta \in F$, notons $A\zeta := \{s \in \mathbb{R} | su + \zeta \in A\}$.
Comme $\lambda_n(A) > 0$, il existe $\zeta \in F$ tel que $\lambda_1\left(\{s \in \mathbb{R} | su + \zeta \in A\}\right) > 0$.
Ainsi, pour tout $s \in A\zeta$, $su + \zeta \in A$, donc $\lim_{t\to 0} \frac{f(su + \zeta + tu) - f(su + \zeta)}{t}$ n'existe pas.

On en déduit que l'application $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall s \in \mathbb{R}, \psi(s) = f(su + \zeta)$ n'est pas dérivable presque partout. Or cette application est Lipschitzienne :

$$|f(su+\zeta) - f(tu+\zeta)| \leqslant L \|su + \zeta - tu + \zeta\| = L\|u\| \, |s-t|$$

Ce qui contredit la Proposition 3.24. Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $h_u(x)$ existe x-presque partout.
Comme G est dénombrable, pour presque tout x, $h_u(x)$ existe pour tout $u \in G$.

· Montrons que x-presque partout, $u \mapsto h_u(x)$ est additive sur G :
Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & , \|x\| \leqslant 1 \\ 0 & , \|x\| > 1 \end{cases} \end{array}$$

Alors φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, son support est $\overline{B(0,1)}$ et C est une constante choisie de telle façon que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\lambda_n = 1$.
Définissons maintenant

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (f \star \varphi)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, dy \end{array}$$

Alors g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$Dg(x)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) D\varphi(x-y)(u) \, dy = (f \star D\varphi)(x)(u)$$

De plus, pour tout $u \in G$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{g(x+tu) - g(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \frac{f(x+tu-y) - f(x-y)}{t} \, dy$$

et

$$\frac{f(x+tu-y) - f(x-y)}{t} \to h_u(x-y)$$

y-presque partout, lorsque t tend vers 0.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $u \in G$ et t,

$$\left| \varphi(y) \frac{f(x+tu-y) - f(x-y)}{t} \right| \leqslant \frac{C}{e} \frac{L}{|t|} |x + tu - y - x + y| = \frac{C}{e} L \|u\|$$

u étant fixé, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et donc :

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(x+tu) - g(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) h_u(x-y) \, dy = \varphi \star h_u(x)$$

Ainsi, pour tout $u \in G$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Dg(x)(u) = (\varphi \star h_u)(x)$.

L'application $Dg(x)$ est linéaire, donc pour tout $u, v \in G$,

$$\varphi \star h_{u+v}(x) = Dg(x)(u+v) = Dg(x)(u) + Dg(v)(x) = \varphi \star h_u(x) + \varphi \star h_v(x)$$

i.e. $\quad \varphi \star (h_{u+v} - h_u - h_v)(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$

i.e. $\quad \varphi \star (h_{u+v} - h_u - h_v) = 0$

Soit $\varphi_k = k^n\varphi(kx)$. On montre de même que

$$\forall u, v \in G, \varphi_k \star (h_{u+v} - h_u - h_v) = 0$$

Soient maintenant $u, v \in G$ et

$$\begin{array}{rcl} \overline{h} : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (h_{u+v} - h_u - h_v)(x) \end{array}$$

Alors $\overline{h}$ est mesurable comme limite de fonctions mesurables.
Montrons que $\overline{h} \in L^1_{loc}$:
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors pour $x \in K$,

$$\begin{array}{rcl} |h_{u+v}(x) & - & h_u(x) - h_v(x)| \\ & = & \lim\limits_{t\to 0} \left| \dfrac{f(x+t(u+v)) - f(x) - f(x+tu) + f(x) - f(x+tv) + f(x)}{t} \right| \\ & \leqslant & \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{L}{|t|}(\|x+t(u+v) - x - tu\| + \|x+tv-x\|) \\ & = & \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{L}{|t|}|t|(\|v\| + \|v\|) = 2L\|v\| \end{array}$$

C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|\overline{h}(x)| \leqslant 2L\,\|v\|$. Ainsi,

$$\int_K |\overline{h}(x)|\ d\lambda \leqslant \int_K 2L\,\|v\|\ \ d\lambda = \lambda(K)2L\,\|v\| < +\infty$$

car K est un compact de $\mathbb{R}^n$ donc fermé et borné.
Finalement, $\overline{h} \in L^1_{loc}$.

On a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rcl} |(\varphi_k \star \overline{h})(x) - \overline{h}(x)| & = & \left| \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} k^n\varphi(k(x-y))\overline{h}(y)\ dy - \overline{h}(x) \right| \\ & = & \left| \displaystyle\int_{B(x,\frac{1}{k})} k^n\varphi(k(x-y))(\overline{h}(y) - \overline{h}(x))\ dy \right| \\ & \leqslant & \dfrac{C}{e} \displaystyle\int_{B(x,\frac{1}{k})} k^n|\overline{h}(y) - \overline{h}(x)|\ dy \\ & \leqslant & \dfrac{C}{e\lambda_n(B(x,\frac{1}{k}))} \displaystyle\int_{B(x,\frac{1}{k})} |\overline{h}(y) - \overline{h}(x)|\ dy \end{array}$$

Or d'après le Lemme 3.29,

$$\frac{1}{\lambda_n(B(x,\frac{1}{k}))} \int_{B(x,\frac{1}{k})} |\overline{h}(y) - \overline{h}(x)|\ dy \to 0 \text{ lorsque } k \to +\infty$$

car $\overline{h} \in L^1_{loc}$. Donc pour presque tout x, $\varphi_k \star \overline{h} \to \overline{h}$ lorsque k tend vers $+\infty$.
Finalement, pour presque tout x, $\varphi \star \overline{h} = \overline{h}$.

Or pour presque tout x, $\varphi \star \overline{h}(x) = 0$, donc x-presque partout $\overline{h} = 0$ et

$$\forall u, v \in G, h_{u+v} = h_u + h_v \ x\text{-presque partout}$$

C'est-à-dire : x-presque partout, $u \mapsto h_u(x)$ est additive sur G.

On peut donc appliquer le Lemme 3.27 et on obtient que x-presque partout, f est Gâteaux-différentiable.

Par le Lemme 3.26, f est donc Fréchet-différentiable x-presque partout.

□

3.3.2 Retour au cas des espaces séparables

Théorème 3.30 (Godefroy-Kalton) *Tout espace de Banach séparable X a la propriété de relèvement isométrique.*

Preuve : X est séparable. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite libre et totale dans X vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = \dfrac{1}{2^n}$.

Soient

$$\begin{array}{rcl} D & = & \overline{vect}\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ H & = & [0,1]^{\mathbb{N}} \\ H_n & = & [0,1]^{\mathbb{N}_n},\ \text{où}\ \ \mathbb{N}_n = \mathbb{N}\backslash\{n\} \\ \pi_n & : & \begin{array}{ccc} H & \to & H_n \\ (t_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & (t_k)_{k\neq n} \end{array},\ \text{et}\ \ \lambda_n = \pi_n(\lambda) \\ L & : & \begin{array}{ccc} H & \to & D \\ (t_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t_k x_k \end{array} \\ L_n & : & \begin{array}{ccc} H_n & \to & D \\ (t_k)_{k\neq n} & \mapsto & \sum\limits_{k\neq n} t_k x_k \end{array} \\ \varphi_n & = & \displaystyle\int_{H_n} [\delta(x_n + L_n(t)) - \delta(L_n(t))] d\lambda_n(t) \in \mathcal{F}(X) \end{array}$$

Alors,

$$\begin{array}{rcl} \beta(\varphi_n) & = & \beta\left(\displaystyle\int_{H_n} [\delta(x_n + L_n(t)) - \delta(L_n(t))] d\lambda_n(t)\right) \\ & = & \displaystyle\int_{H_n} [\beta\delta(x_n + L_n(t)) - \beta\delta(L_n(t))] d\lambda_n(t),\ \text{car}\ \beta\ \text{est linéaire} \\ & = & \displaystyle\int_{H_n} [x_n + L_n(t) - L_n(t)] d\lambda_n(t),\ \text{car}\ \ \beta\delta = Id \\ & = & x_n,\ \text{car}\ \lambda_n\ \text{est une mesure de probabilité sur}\ \ H_n \end{array}$$

i.e. $\beta(\varphi_n) = x_n$.

Définissons $T : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathcal{F}(X) \\ \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \alpha_i x_i & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \varphi_i \end{array}$

Alors T est linéaire et $\beta \circ T = Id$:

$$\beta \circ T\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i x_i\right) = \beta\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \beta(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i x_i$$

Montrons que T est continue :

Pour cela, montrons que pour tout $x \in D$, $\|Tx\|_{\mathcal{F}(X)} \leqslant \|x\|$.

· Soit $f \in Lip_0(X)$ partout Gâteaux-différentiable.

$$\begin{aligned} < f, \varphi_n > &= \int_{H_n} [\delta(x_n + L_n(t))(f) - \delta(L_n(t))(f)]\ d\lambda_n(t) \\ &= \int_{H_n} [f(x_n + L_n(t)) - f(L_n(t))]\ d\lambda_n(t) \\ &\overset{i}{=} \int_{H_n} \int_0^1 < Df(ux_n + L_n(t)), x_n > du\ d\lambda_n(t) \\ &\overset{ii}{=} \int_H < Df(L(t), x_n) > d\lambda(t) \end{aligned}$$

$i)$ d'après la formule de Taylor avec reste intégral
$ii)$ car $L(t,u) = L_n(t) + ux_n$, où $t \in H_n, u \in [0,1]$

Ainsi, pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} | < f, Tx > | &= \left| \int_H < Df(L(t)), x > d\lambda(t) \right| \leqslant \int_H |< Df(L(t)), x >|\ d\lambda(t) \\ &\overset{i}{\leqslant} \int_H \|f\|_{lip} \|x\|_X\ d\lambda(t) \overset{ii}{=} \|f\|_{lip} \|x\|_X \end{aligned}$$

$i)$ par le théorème des accroissements finis
$ii)$ car λ est une mesure de probabilité

Ainsi, on a montré que pour toute fonction $f \in Lip_0(X)$ partout Gâteaux-différentiable, $| < f, Tx > | \leqslant \|f\|_{lip} \|x\|_X$.

· Soit $f \in Lip_0(X)$ quelconque. Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in D$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_k(y) = \int_{[0,1]^n} f\left(y + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)\ dt_1...dt_n - \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)\ dt_1...dt_n$$

Alors,

a)

$$g_k(0) = \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)\ dt_1...dt_n - \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)\ dt_1...dt_n = 0$$

b) $\|g_k\|_{lip} \leqslant \|f\|_{lip}$:
Soient $y, z \in X$,

$$\begin{aligned} |g_k(y) &- g_k(z)| \\ &= \left| \int_{[0,1]^n} f\left(y + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\right)\ dt_1...dt_n - \int_{[0,1]^n} f\left(z + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\right)\ dt_1...dt_n \right| \\ &= \left| \int_{[0,1]^n} f\left(y + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\right) - f\left(z + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\right)\ dt_1...dt_n \right| \\ &\leqslant \|f\|_{lip} \|y - z\| \end{aligned}$$

c) $\|g_k - f\|_\infty \to 0$:
Soit $y \in X$.

$$\begin{aligned}
|g_k(y) \quad &- \quad f(y)| \\
&= \left| \int_{[0,1]^n} f\left(y + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) - f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) - f(y) + f(0)\ dt_1...dt_n \right| \\
&\leqslant \int_{[0,1]^n} L \left\| y + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i - y \right\| + L \left\| \frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i - 0 \right\|\ dt \leqslant \frac{2L}{k} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \\
&\longrightarrow 0 \text{ lorsque k} \to +\infty
\end{aligned}$$

d) Pour tout $y \in X, f(y+.)$ est Fréchet-différentiable presque partout sur $vect\,\{x_i\}_{i=1}^n$
D'après le Théorème 3.25 de Rademacher car $f(y+.)$ est Lipschitzienne.

e) Pour tout $y \in X, g_k$ est Fréchet-différentiable :
Soit $u \in X$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \quad & \frac{g_k(y+tu) - g_k(y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{[0,1]^n} f\left(y + tu + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) - f\left(y + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)\ dt_1...dt_n \\
&\stackrel{i}{=} \int_{[0,1]^n} \lim_{t\to 0} f\left(y + [\frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i + tu]\right) - f\left(y + [\frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i]\right)\ dt_1...dt_n \\
&\stackrel{ii}{=} \int_{[0,1]^n} Df\left(y + [\frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i]\right)(u)\ dt_1...dt_n
\end{aligned}$$

$i)$ par le théorème de convergence dominée

$ii)$ car $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^n t_i x_i \in vect\,\{x_1, ...x_n\}$ et $f(y+.)$ est Fréchet-différentiable sur $vect\,\{x_1, ...x_n\}$

De plus cette limite est linéaire car $Df(y+.)$ l'est. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k est Fréchet-différentiable sur X.

Donc d'après ce qui précède,

$$\forall x \in D, |< g_k, Tx >| \leqslant \|g_k\|_{lip} \|x\|_X \leqslant \|f\|_{lip} \|x\|_X$$

De plus, $\|g_k - f\|_\infty \to 0$ donc $g_k \to f$, $\sigma(Lip_0(X), Lip_0(X)^*) = \sigma(Lip_0(X), \mathcal{F}(X))$.
C'est-à-dire pour tout $\mu \in \mathcal{F}(X), < g_k, \mu > \to < f, \mu >$.
Or, T est à valeurs dans $\mathcal{F}(X)$, donc pour tout $x \in D$, $< g_k, Tx > \to < f, Tx >$.
Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in D$, $|< g_k, Tx >| \leqslant \|f\|_{lip} \|x\|_X$, on a $|< f, Tx >| \leqslant \|f\|_{lip} \|x\|_X$.

Ainsi, pour tout $f \in Lip_0(X), |< f, Tx >| \leqslant \|f\|_{lip} \|x\|_X$. D'où $\|Tx\|_{\mathcal{F}(X)} \leqslant \|x\|_X$ et T continue sur D, de norme inférieure ou égale à 1.

T est une application linéaire continue sur D dense dans X, on peut donc la prolonger en une application linéaire continue sur X, encore notée T.
De plus, on a toujours $\beta \circ T = Id_X$.

On a vu que $\|\beta\| = 1$, $\|T\| \leqslant 1$ et $\beta \circ T = Id$, donc $\|T\| = 1$ et T est une isométrie :
Pour $x, y \in X$, $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leqslant \|x - y\|$
et $\|x - y\| = \|\beta T(x-y)\| \leqslant \|\beta\| \, \|T(x-y)\| \leqslant \|T(x-y)\|$
d'où $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\|$.

Récapitulons : T est une isométrie linéaire vérifiant $\beta \circ T = Id_X$. X a donc la propriété de relèvement isométrique.

□

Nous pouvons maintenant énoncer les deux résultats centraux de ce projet :

Théorème 3.31 *Soit X et Y deux espaces de Banach tels que X soit séparable. Soit $Q : Y \to X$ une application linéaire quotient.*

Si Q admet un inverse à droite Lipschitzien L, alors Q admet un inverse à droite linéaire V tel que $\|V\| \leqslant \|L\|_{lip}$.

Preuve : La suite $0 \longrightarrow Z \longrightarrow Y \xrightarrow{Q} X \longrightarrow 0$ est une suite exacte. De plus, elle est Lipschitz-scindée car $L : X \to Y$ vérifie $QL = Id_X$.

Comme X est séparable, d'après le Théorème 3.30, X a la propriété de relèvement isométrique. La Proposition 3.14 implique que la suite exacte est linéairement scindée, c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire $V : X \to Y$ linéaire telle que $QV = Id_X$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\|V\| \leqslant \|L\|_{lip}$.

D'après la Proposition 3.10, il existe $\overline{L} : \mathcal{F}(X) \to Y$ linéaire telle que $\overline{L}\delta_X = L$ et $\|\overline{L}\| = \|L\|_{lip}$.

Alors, $Q\overline{L}\delta_X = QL = Id_X$.

De plus, on a vu au Lemme 3.8 que $Id_X = \beta_X \delta_X$. Donc $Q\overline{L} = \beta_X$.

Dans la preuve du Théorème 3.30 on a construit une isométrie linéaire $T : X \to \mathcal{F}(X)$ telle que $\beta_X T = Id_X$.

Ainsi, $Q\overline{L}T = \beta_X T = Id_X = QV$. Donc $\overline{L}T = V$.

Finalement, $\|V\| \leqslant ||\overline{L}|| \, \|T\| = \|L\|_{lip}$.

□

Théorème 3.32 *Soit X un espace de Banach séparable.*

S'il existe une injection isométrique de X dans un Banach Y, alors Y contient un sous-espace vectoriel isométrique à X.

Preuve : Commençons par supposer $L(0) = 0$.

D'après le Théorème 3.30, X a la propriété de relèvement.

Soit $L : X \to Y$ l'injection isométrique. Alors il existe $Y_1 \subset Y$ tel que X soit isométrique à Y_1 : $Y_1 \equiv L(X)$.

D'après le Théorème 3.17 Y_1, donc Y, contient un sous-espace vectoriel linéairement isométrique à X.

□

Exemple 3.33 *Considérons l'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) \\ t & \mapsto & (t, \sin t) \end{array}$.

Alors, pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(t')\|_\infty &= \|(t, \sin t) - (t', \sin t')\|_\infty = \|(t - t', \sin t - \sin t')\|_\infty \\ &= \max\{|t - t'|, |\sin t - \sin t'|\} = |t - t'| \end{aligned}$$

Donc f *est une isométrie. De plus,* $f(0) = (0, \sin 0) = (0, 0)$.

D'après le Théorème 2.5 de Figiel, $Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$ *est l'unique application telle que* $Qf = Id_{\mathbb{R}}$ *et* $\|Q\| \leqslant 1$ *(pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^2, |Q(x, y)| = |x| \leqslant \|(x, y)\|_\infty$*).*

De plus Q *est une application quotient.*

D'après le Corollaire 3.15 il existe une isométrie linéaire $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$QS = Id_{\mathbb{R}}$$

De plus, $\mathbb{R}$ *est complémenté dans* $\mathbb{R}^2$*, et on peut écrire* $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = S(x) + (f(x) - S(x))$$

C'est à dire que f *est décomposée comme somme d'une isométrie linéaire et d'une partie non linéaire qui ne change pas la norme.*

En fait, toute isométrie sur un espace de Banach séparable peut se décomposer de cette façon :

Soit X un espace de Banach séparable et Y un espace de Banach.

Soit $j : X \to j(X) \subset Y$ une isométrie. On peut supposer que $j(0) = 0$.

D'après le Théorème 2.5 de Figiel, il existe une unique application $Q : \overline{vect}\, j(X) \to X$ linéaire continue telle que $\|Q\| \leqslant 1$ et $Q \circ j = Id_X$. En particulier, Q est surjective.

D'après le Corollaire 3.15, il existe une isométrie linéaire $S : X \to j(X) \subset Y$ telle que $Q \circ S = Id_X$.

De plus, d'après le Théorème 3.32 $S(X)$ est complémenté dans $\overline{vect}\, j(X)$.

Finalement, on peut écrire

$$\forall x \in X, j(x) = S(x) + (j(x) - S(x)) \in S(X) \oplus KerQ$$

Conclusion

Pour conclure, grâce au Théorème 1.3 de Mazur-Ulam, nous avons vu que toute isométrie surjective f entre deux espaces-vectoriels normés est affine. Si de plus $f(0) = 0$, elle est évidemment linéaire.

De plus, en combinant le Théorème 2.5 de Figiel (toute isométrie entre deux espaces vectoriels normés vérifiant $f(0) = 0$ admet un unique inverse à gauche linéaire continue de norme inférieure à 1, au Théorème 3.30 de Godefroy-Kalton (tout espace de Banach séparable a la propriété de relèvement isométrique), nous avons vu que si X et Y sont des espaces de Banach tels que X est séparable et $\varphi : X \to Y$ une isométrie, alors Y contient un sous-espace vectoriel fermé linéairement isométrique à X. Mais qu'en est-il des espaces non séparables ? Ce cas est traité dans [3].

Pour finir, nous avons introduit les espaces Lipschitz-libres pour démontrer ce résultat. Serait-il possible de le montrer sans utiliser cette notion ? C'est l'objet de [8].

Références

[1] Y. Benyamini et J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis, Volume 1*, A. M. S. Colloquium Publications 48, 2000

[2] T. Figiel, *On nonlinear isometric embeddings of normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 185-188

[3] G. Godefroy et N. Kalton, *Lipschitz-Free Banach Spaces*, Studia Math. 159 (2003), 121-141

[4] G. Lancien, Notes de cours

[5] S. Mazur et S. Ulam, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 194 (1932), 946-948

[6] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Springer-Verlag, 1989

[7] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, American Mathematical Monthly 110 (2003), n°7, 633-635

[8] Composition d'Analyse et Probabilités, Agrégation externe de Mathématiques 2011

[9] http ://www-history.mcs.st-and.uk/Printonly/Mazur.html

[10] http ://fr.wikipedia.org/wiki/Stanislaw-Ulam