MASTER 2$^{\text{ème}}$ année

SCIENCE, TECHNOLOGIE, SANTÉ

RECHERCHE
MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Contre-exemples pour la classification non linéaire des espaces de Banach

par

Aude DALET

Année 2011-2012

Sous la direction de Gilles LANCIEN

Table des matières

Introduction

Commençons par définir différentes relations d'équivalences entre espaces de Banach :

Définition : Soient X et Y deux espaces de Banach (sur $\mathbb{R}$).

- X et Y sont **linéairement isomorphes** en tant qu'espaces de Banach s'il existe une application linéaire continue de X dans Y bijective.
- X et Y sont **Lipschitz-équivalents** s'il existe une application Lipschitzienne de X dans Y, bijective et de bijection réciproque Lipschitzienne. Nous noterons $X \underset{L}{\sim} Y$.
- X et Y sont **uniformément homéomorphes** s'il existe une application uniformément continue de X dans Y, bijective et de bijection réciproque uniformément continue. Nous noterons $X \underset{UH}{\sim} Y$.
- X et Y sont **homéomorphes** s'il existe une application continue de X dans Y, bijective et de bijection réciproque continue.

Le but de ce mémoire est d'étudier les relations qu'il existe entre Lipschitz-équivalence et isomorphisme d'espace de Banach, ou entre uniforme homéomorphisme et isomorphisme.

Dans le premier chapitre nous développerons un exemple dû à I. Aharoni et J. Lindenstrauss dans [1]. Nous construirons un sous-espace de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ qui est Lipschitz-équivalent à $c_0(\mathbb{R})$. Cependant nous montrerons que $c_0(\mathbb{R})$ n'est linéairement isomorphe à aucun sous espace de $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Nous en déduirons donc que deux espaces Lipschitz-équivalents ne sont pas nécessairement linéairement équivalents.

Le deuxième chapitre sera basé sur un article de N.J. Kalton [4]. Nous donnerons dans une première partie des définitions et résultats utiles pour la suite, notamment un Lemme technique permettant de définir une application uniformément continue entre deux espaces de Banach donnés.

Nous définirons ensuite ce que sont des espaces proches ou uniformément proches et démontrerons un Théorème permettant de voir quand deux sommes ℓ_p d'espaces de Banach sont (uniformément) proches. Nous verrons également une condition sur les sphères unités pour montrer que deux espaces sont (uniformément) proches.

Pour terminer ce chapitre, nous démontrerons divers Théorèmes liant la proximité uniforme et l'uniforme homéomorphisme d'espaces de Banach.

Dans un dernier chapitre nous étudierons le lien entre homéomorphisme uniforme et isomorphisme linéaire. Nous citerons tout d'abord un exemple dû à M. Ribe dans [7] d'espaces séparables uniformément homéomorphes mais pas isomorphes. Nous verrons cet exemple comme une conséquence du Chapitre 2. De plus il permettra de montrer que la réflexivité, la propriété de Radon-Nikodym et le fait qu'un espace soit d'Asplund ne sont pas stables par homéomorphisme uniforme.

Nous citerons également, sans démonstration, d'autres résultats connus d'espaces qui, s'ils sont uniformément homéomorphes à un autre espace, sont alors linéairement isomorphes à cet espace.

Chapitre 1

Lipschitz-équivalence et isomorphisme d'espaces de Banach

Pour commencer, nous pouvons nous demander :

Question n°1 : Si deux espaces de Banach sont Lipschitz-équivalents, sont-ils nécessairement isomorphes ?

Un contre-exemple dans le cas non séparable a été donné en 1978 par I. Aharoni et J. Lindenstrauss dans [1] :

Exemple 1.0.1. *L'ensemble $c_0(\mathbb{R})$ est Lipschitz-équivalent à un sous-espace vectoriel fermé X de $\ell_\infty(\mathbb{N})$.*
C'est-à-dire qu'il existe $T : c_0(\mathbb{R}) \to X$ bijective telle que T et T^{-1} sont Lipschitziennes.

Cependant comme il n'existe pas de famille dénombrable de formes linéaires qui sépare les points de $c_0(\mathbb{R})$, cet ensemble n'est linéairement isomorphe à aucun sous-espace de ℓ_∞.

Rappelons tout d'abord que $c_0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}}$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini F de $\mathbb{R}$ tel que $\forall\gamma \notin F, |x_\gamma| < \varepsilon$.

Alors pour $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}} \in c_0(\mathbb{R})$, le support de x est dénombrable car

$$\{\gamma \in \mathbb{R} \mid x_\gamma \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{\gamma \in \mathbb{R} \mid |x_\gamma| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\{\gamma \in \mathbb{R} \mid |x_\gamma| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ est fini.
Ainsi, supp $x = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots\}$, et $x_{\gamma_n} \to 0$.

Preuve :

1. Montrons qu'il existe une famille $\{N_\gamma\}_{\gamma\in\mathbb{R}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}, N_\gamma$ est infini et pour tous $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma \neq \gamma', N_\gamma \cap N_{\gamma'}$ est fini.

   Soit $\mathbb{Q} = \{q_n, n \in \mathbb{N}\}$ une énumération de $\mathbb{Q}$.

   A tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on associe une suite de rationnels deux-à-deux distincts qui converge vers γ. Soit E_γ l'ensemble des valeurs de cette suite et $N_\gamma = \{n \in \mathbb{N} \mid q_n \in E_\gamma\}$.

   Alors pour tout γ, N_γ est une partie infinie de $\mathbb{N}$ car on approche γ par une suite de rationnels **deux-à-deux distincts**.

   Soient γ et γ' dans $\mathbb{R}$ tels que $\gamma \neq \gamma'$.

   Soient $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ convergeant vers γ et $(\gamma'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ convergeant vers γ'.

Comme $\gamma \neq \gamma'$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N, \gamma_n \neq \gamma'_n$. Ainsi, le cardinal de $N_\gamma \cap N_{\gamma'}$ est inférieur ou égal à N, donc fini.

Nous avons donc construit une famille $\{N_\gamma\}_{\gamma\in\mathbb{R}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}, N_\gamma$ est infini et pour tous $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma \neq \gamma', N_\gamma \cap N_{\gamma'}$ est fini.

Définissons pour $\gamma \in \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de N_γ :

$$I_\gamma = (I_\gamma(1), \ldots, I_\gamma(n), \ldots) \in \ell_\infty, \text{ où } I_\gamma(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n \in N_\gamma \\ 0 & \text{ si } n \notin N_\gamma \end{cases}$$

Soit X le sous-espace vectoriel fermé de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ engendré par $c_0(\mathbb{N})$ et les fonctions caractéristiques de $N_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$X = \overline{vect}\,(c_0 \cup \{I_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\})$$

2. Commençons par montrer que $c_0(\mathbb{R})$ n'est linéairement isomorphe à aucun sous espace de $\ell_\infty(\mathbb{N})$:

Pour cela nous allons montrer qu'aucune famille dénombrable du dual de $c_0(\mathbb{R})$ ne sépare les points de $c_0(\mathbb{R})$. En effet, les fonctions coordonnées sur $\ell_\infty(\mathbb{N})$ formant une famille dénombrable d'éléments de $\ell_\infty(\mathbb{N})^*$ qui sépare les points de $\ell_\infty(\mathbb{N})$, il n'existera donc pas d'isomorphisme linéaire entre $c_0(\mathbb{R})$ et $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

- La famille dénombrable formées des fonctions coordonnées sur $\ell_\infty(\mathbb{N})$ sépare les points de $\ell_\infty(\mathbb{N})$:
  Soient $x \neq y \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $e_k^*(x) = x(k) \neq e_k^*(y) = y(k)$.
- Aucune famille dénombrable de $c_0(\mathbb{R})^*$ ne sépare les points de $c_0(\mathbb{R})$:
  Commençons par montrer que $c_0(\mathbb{R})^* = \ell_1(\mathbb{R}) = \left\{ y = (y_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}} \mid \sum_{\gamma\in\mathbb{R}} |y_\gamma| < +\infty \right\}$
  où $\sum_{\gamma\in\mathbb{R}} |y_\gamma| = \sup_{\substack{F \text{ partie finie} \\ \text{de } \mathbb{R}}} \sum_F |y_\gamma|$.

  Remarque : Tout comme ceux de $c_0(\mathbb{R})$, les éléments de $\ell_1(\mathbb{R})$ sont à support dénombrable.

  Soit

$$J : \begin{array}{ccc} \ell_1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & c_0(\mathbb{R})^* \\ y = (y_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}} & \longmapsto & Jy : \begin{array}{ccc} c_0(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}} & \mapsto & \sum_{\gamma\in\mathbb{R}} x_\gamma y_\gamma \end{array} \end{array}$$

  Montrons que J est une isométrie surjective.
  <u>J isométrie :</u>
  Soit $y = (y_\gamma)_{\gamma\in R} \in \ell_1(\mathbb{R})$.
  Pour tout $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}}$,

$$|(Jy)(x)| = |\sum_{\gamma\in\mathbb{R}} x_\gamma y_\gamma| \leqslant \sum_{\gamma\in\mathbb{R}} |x_\gamma y_\gamma| \leqslant \|x\|_\infty \|y\|_1$$

  Donc $\|Jy\| \leqslant \|y\|_1$

Soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots)$ le support de y.
Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned} x^N(\gamma_i) &= \operatorname{sgn}(y_{\gamma_i}), 1 \leqslant i \leqslant N \\ x^N(\gamma) &= 0, \gamma \notin \{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\} \end{aligned}$$

Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*, x^N \in c_{00}(\mathbb{R})$ et $\left\|x^N\right\|_\infty = 1$.
De plus, $\left\langle Jy, x^N \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{N} |y_{\gamma_i}| \longrightarrow \|y\|_1$ lorsque N tend vers $+\infty$.
Donc $\|y\|_1 \leqslant \|Jy\|$.
Finalement, $\|Jy\| = \|y\|_1$ et J est une isométrie.

<u>J surjective :</u>
Soit $f \in c_0(\mathbb{R})^*$. Définissons $y = (y_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$ par $\forall \gamma \in \mathbb{R}, y_\gamma = f(e_\gamma)$. Montrons que $y \in \ell_1(\mathbb{R})$.
Notons pour tout $\gamma \in \mathbb{R}, x_\gamma = \text{signe}(y_\gamma)$. Soient $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$ et F une partie finie de $\mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{\gamma \in F} |y_\gamma| = \sum_{\gamma \in F} x_\gamma y_\gamma = \sum_{\gamma \in F} x_\gamma f(e_\gamma) = f\left(\sum_{\gamma \in F} x_\gamma e_\gamma\right)$$

Comme f est continue,

$$\sum_{\gamma \in F} |y_\gamma| = |\sum_{\gamma \in F} |y_\gamma|| = |f\left(\sum_{\gamma \in F} x_\gamma e_\gamma\right)| \leqslant \|f\|_{c_0(\mathbb{R})^*} \left\|\sum_{\gamma \in F} x_\gamma e_\gamma\right\|_\infty$$

De plus, $\left\|\sum\limits_{\gamma \in F} x_\gamma e_\gamma\right\|_\infty = 1$, donc $\sum\limits_{\gamma \in F} |y_\gamma| \leqslant \|f\|$ pour toute F partie finie de $\mathbb{R}$.
Finalement,

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{R}} |y_\gamma| = \sup_{\substack{F \text{ partie finie} \\ \text{de } \mathbb{R}}} \sum_{\gamma \in F} |y_\gamma| \leqslant \|f\|$$

donc $y \in \ell_1(\mathbb{R})$.
Il ne nous reste plus qu'à montrer que $f = Jy$. Pour cela, nous allons montrer que f et Jy coïncident sur l'ensemble des éléments de $c_0(\mathbb{R})$ à support fini. Cet ensemble étant dense dans $c_0(\mathbb{R})$, nous obtiendrons alors $f = Jy$ partout.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z = (z_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$ de support $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.
Alors,

$$Jy(z) = \sum_{\gamma \in \mathbb{R}} z_\gamma y_\gamma = \sum_{i=1}^{n} z_{\gamma_i} y_{\gamma_i} = \sum_{i=1}^{n} z_{\gamma_i} f(e_{\gamma_i}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} z_{\gamma_i} e_{\gamma_i}\right) = f(z)$$

Donc $f = Jy$ sur l'ensemble des éléments de $c_0(\mathbb{R})$ à support fini, donc sur $c_0(\mathbb{R})$ tout entier.
Finalement, nous avons montré que J est une application linéaire surjective de $\ell_1(\mathbb{R})$ à valeurs dans $c_0(\mathbb{R})^*$. Donc $\ell_1(\mathbb{R})$ est le dual de $c_0(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe une famille dénombrable $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_{\gamma,n}^*)_{\gamma \in \mathbb{R}})_{n \in \mathbb{N}}$ de $c_0(\mathbb{R})^* = \ell_1(\mathbb{R})$ qui sépare les points de $c_0(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit D_n le

support de x_n^*, alors D_n est dénombrable. Ainsi, $D = \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ est dénombrable. Comme $\mathbb{R}$ est non dénombrable, il existe $\gamma \in \mathbb{R}\backslash D$.
Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n^*(e_\gamma) = 0$ et $x_n^*(0) = 0$. Donc e_γ et 0 ne sont pas séparés par la famille $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalement, aucune famille dénombrable de $c_0(\mathbb{R})^*$ ne sépare les points de $c_0(\mathbb{R})$.

· $c_0(\mathbb{R})$ n'est linéairement isomorphe à aucun sous-espace fermé F de $\ell_\infty(\mathbb{N})$:
Procédons par l'absurde en supposant qu'il existe F sous-espace fermé de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ et $f : c_0(\mathbb{R}) \to F$ isomorphisme linéaire. Nous avons vu qu'il existe une famille dénombrable $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de F^* qui sépare les points de F.
Soit $f^* : F^* \to c_0(\mathbb{R})^*$ l'adjoint de f. Montrons qu'alors $(f^*(x_n^*))_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille dénombrable de $c_0(\mathbb{R})^*$ qui sépare les points de $c_0(\mathbb{R})$:
Soient $x \neq y \in c_0(\mathbb{R})$. Comme f est injective, $f(x) \neq f(y) \in F$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\langle x_n^*, f(x)\rangle \neq \langle x_n^*, f(y)\rangle$. f^* étant l'adjoint de f, nous avons : $\langle f^*(x_n^*), x\rangle \neq \langle f^*(x_n^*), y\rangle$.
Ainsi la famille dénombrable $(f^*(x_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \subset c_0(\mathbb{R})^*$ sépare les points de $c_0(\mathbb{R})$. Ce qui contredit le point précédant, donc $c_0(\mathbb{R})$ n'est linéairement isomorphe à aucun sous-espace fermé F de $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

3. Montrons que $c_0(\mathbb{R})$ est linéairement isométrique au quotient $X/c_0(\mathbb{N})$:

Soit $Q : X \to X/c_0(\mathbb{N})$ l'application quotient.
Remarquons d'abord que $X/c_0(\mathbb{N}) = \overline{\text{vect}}\,\{Q(I_\gamma), \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Définissons l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \text{vect}\,\{Q(I_\gamma), \gamma \in \mathbb{R}\} & \to & c_{00}(\mathbb{R}) \\ \sum\limits_{j=1}^n a_j Q(I_{\gamma_j}) & \mapsto & \sum\limits_{j=1}^n a_j e_{\gamma_j} \end{array}$$

La famille $\{Q(I_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ étant libre, Φ est bien définie.

· Alors Φ est clairement bijective de vect $\{Q(I_\gamma), \gamma \in \mathbb{R}\}$ dans $c_{00}(\mathbb{R})$.
· Montrons que Φ est une isométrie :
Pour $\sum\limits_{j=1}^n a_j I_{\gamma_j} \in X$, $\left\|\sum\limits_{j=1}^n a_j Q(I_{\gamma_j})\right\|_{X/c_0(\mathbb{N})} = \text{dist}\left(\sum\limits_{j=1}^n a_j I_{\gamma_j}, c_0(\mathbb{N})\right)$.
Remarque : Pour $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, $\text{dist}(x, c_0(\mathbb{N})) = \limsup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$.
Posons $N = \bigcup\limits_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} (N_{\gamma_i} \cap N_{\gamma_j})$. Alors comme N est fini, I_N appartient à $c_0(\mathbb{N})$, donc $\sum\limits_{j=1}^n a_j Q(I_{\gamma_j}) = \sum\limits_{j=1}^n a_j Q(I_{N_{\gamma_j}\backslash N})$.
De plus, les $N_{\gamma_j}\backslash N, 1 \leqslant j \leqslant n$, sont deux à deux disjoints et infinis, donc

$$\limsup_{i\in\mathbb{N}} \left| \left(\sum_{j=1}^n a_j Q(I_{N_{\gamma_j}\backslash N})\right)(i) \right| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |a_j|$$

Finalement, nous avons montré que

$$\left\|\sum_{j=1}^n a_j Q(I_{\gamma_j})\right\|_{X/c_0(\mathbb{N})} = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |a_j| = \left\|\Phi\left(\sum_{j=1}^n a_j Q(I_{\gamma_j})\right)\right\|_{c_0(\mathbb{R})}$$

Ainsi, Φ est une isométrie.

Nous avons donc montré que Φ ainsi définie est une isométrie linéaire surjective entre $\mathrm{vect}\,\{Q(I_\gamma), \gamma \in \mathbb{R}\}$ et $c_{00}(\mathbb{R})$. De plus, $\overline{\mathrm{vect}}\,\{Q(I_\gamma), \gamma \in \mathbb{R}\} = X/c_0(\mathbb{N})$ et $\overline{c_{00}(\mathbb{R})} = c_0(\mathbb{R})$. Nous pouvons donc prolonger Φ par densité en une isométrie surjective, encore notée Φ, entre $X/c_0(\mathbb{N})$ et $c_0(\mathbb{R})$.

Finalement, $c_0(\mathbb{R})$ est linéairement isométrique à $X/c_0(\mathbb{N})$, nous pourrons donc identifier ces deux espaces.

4. Montrons que l'application $Q : X \to X/c_0(\mathbb{N})$ $(\equiv c_0(\mathbb{R}))$ admet un relèvement Lipschitzien :

Soit

$$y = \sum_{n=1}^{t} a_n e_{\gamma_n} - \sum_{m=1}^{s} b_m e_{\gamma'_m}$$

l'unique représentation de $y \in \mathrm{vect}\,\{e_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}$ en différence de deux éléments positifs à support disjoint,

où $0 \leqslant s, t < +\infty$, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_t > 0, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_s > 0$ et pour tout $i \neq j, \gamma_i \neq \gamma_j$, $\gamma'_i \neq \gamma'_j$ et $\gamma'_i \neq \gamma_i$

Posons $\begin{array}{l} M_n = N_{\gamma_n} \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} N_{\gamma_i} \right) \\ M'_m = N_{\gamma'_m} \backslash \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m-1} N_{\gamma'_j} \right) \end{array}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, Q(I_{N_{\gamma_n}}) = Q(I_{M_n})$ et pour tout $m \in \mathbb{N}, Q(I_{N_{\gamma'_m}}) = Q(I_{M'_n})$.

Définissons

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{vect}\,\{e_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\} & \to & X \\ y & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{t} a_n I_{M_n} - \sum\limits_{m=1}^{s} b_m I_{M'_m} \end{array}$$

Remarque : L'application ψ est définie sur l'ensemble des éléments de $c_0(\mathbb{R})$ à support fini. Cet ensemble étant dense dans $c_0(\mathbb{R})$, si l'application ψ est Lipschitzienne, nous pourrons la prolonger à $c_0(\mathbb{R})$ tout entier.

Pour $y \in \mathrm{vect}\,\{e_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}$,

$$\begin{aligned} Q\psi(y) &= Q\psi\left(\sum_{n=1}^{t} a_n e_{\gamma_n} - \sum_{m=1}^{s} b_m e_{\gamma'_m}\right) = Q\left(\sum_{n=1}^{t} a_n I_{M_n} - \sum_{m=1}^{s} b_m I_{M'_m}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{t} a_n Q(I_{M_n}) - \sum_{m=1}^{s} b_m Q(I_{M'_m}) = \sum_{n=1}^{t} a_n Q(I_{N_{\gamma_n}}) - \sum_{m=1}^{s} b_m Q(I_{N_{\gamma'_m}}) \\ &= \sum_{n=1}^{t} a_n e_{\gamma_n} - \sum_{m=1}^{s} b_m e_{\gamma'_m} = y \end{aligned}$$

Donc $Q\psi = Id_{\mathrm{vect}\{e_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}}$

Il ne reste plus qu'à montrer que ψ est une application Lipschitzienne :

a) Montrons tout d'abord que

$$\forall y \in \mathrm{vect}\,\{e_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}, \forall n \in \mathbb{N}, \psi(y)(n) = \mathrm{dist}(y^+, Z_n) - \mathrm{dist}(y^-, Z_n)$$

où $Z_n = \overline{\text{vect}}\ \{e_\gamma, n \notin N_\gamma\}$.
Par définition,

$$\text{dist}(y^+, Z_n) = \inf\left\{\left\|\sum_{j=1}^{t} a_j e_{\gamma_j} - \sum_{m=1}^{r} c_m e_{\gamma''_m}\right\|_\infty \mid r \in \mathbb{N}; \forall m \leqslant r, c_m \in \mathbb{R}; n \notin N_{\gamma''_m}\right\}$$

Si dans la décomposition $y^+ = \sum\limits_{j=1}^{t} a_j e_{\gamma_j}$ apparaît un $j \leqslant t$ tel que $n \notin N_{\gamma_j}$, alors la norme est minimisée en faisant apparaître $a_j e_{\gamma_j}$ dans la somme de droite.
Les $j \leqslant t$ tels que $n \in N_{\gamma_j}$ ne pouvant apparaître dans la somme de droite :

$$\begin{aligned}\text{dist}(y^+, Z_n) &= \inf\left\{\left\|\sum_{j=1}^{t} a_j e_{\gamma_j} - \sum_{m=1}^{r} c_m e_{\gamma''_m}\right\|_\infty \mid r \in \mathbb{N}; \forall m \leqslant r, c_m \in \mathbb{R}; n \notin N_{\gamma''_m}\right\} \\ &= \left\|\sum_{\substack{j=1\\ n\notin N_{\gamma_j}}}^{t} (a_j - a_j) e_{\gamma_j} - \sum_{\substack{j=1\\ n\in N_{\gamma_j}}}^{t} a_j e_{\gamma_j}\right\|_\infty = \left\|\sum_{\substack{j=1\\ n\in N_{\gamma_j}}}^{t} a_j e_{\gamma_j}\right\|_\infty = \sup_{\substack{1\leqslant j\leqslant t\\ n\in N_{\gamma_j}}} |a_j|\end{aligned}$$

Or, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_t > 0$, donc $\sup\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant t\\ n\in N_{\gamma_j}}} |a_j| = a_{\min\{1\leqslant j\leqslant t \ \mid\ n\in N_{\gamma_j}\}}$
De la même façon,

$$\text{dist}(y^-, Z_n) = \sup_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ n\in N_{\gamma'_i}}} |b_i| = b_{\min\{1\leqslant i\leqslant s \ \mid\ n\in N_{\gamma'_i}\}}$$

Ainsi,

$$\text{dist}(y^+, Z_n) - \text{dist}(y^-, Z_n) = a_{\min\{1\leqslant j\leqslant t \ \mid\ n\in N_{\gamma_j}\}} - b_{\min\{1\leqslant i\leqslant s \ \mid\ n\in N_{\gamma'_i}\}}$$

Calculons maintenant $\psi(y)(n) = \left(\sum\limits_{j=1}^{t} a_j I_{M_j} - \sum\limits_{i=1}^{s} b_i I_{M'_i}\right)(n)$.
Les M_j (respectivement les M'_i) étant disjoint, n appartient au plus à un M_j (resp. M'_i). De plus, si $n \notin M_j$ (resp. M'_i), alors $I_{M_j}(n) = 0$ (resp. $I_{M'_i}(n) = 0$).
Donc

$$\psi(y)(n) = \left(\sum_{\substack{j=1\\ n\in M_j}}^{t} a_j I_{M_j} - \sum_{\substack{i=1\\ n\in M'_i}}^{s} b_i I_{M'_i}\right)(n) = \sum_{\substack{j=1\\ n\in M_j}}^{t} a_j - \sum_{\substack{i=1\\ n\in M'_i}}^{s} b_i = a_J - b_I$$

avec $n \in M_J \cap M'_I$.
De plus, $M_n = N_{\gamma_n} \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} N_{\gamma_i}\right)$ donc $J = \min\{1 \leqslant j \leqslant t \mid n \in N_{\gamma_j}\}$.

$$M'_m = N_{\gamma'_m} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} N_{\gamma'_j}\right) \text{ donc } I = \min\{1 \leqslant i \leqslant s \mid n \in N_{\gamma'_i}\}$$

Finalement, nous avons montré que

$$\forall y \in \text{vect}\,\{e_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}, \forall n \in \mathbb{N}, \psi(y)(n) = \text{dist}(y^+, Z_n) - \text{dist}(y^-, Z_n)$$

avec $Z_n = \overline{\text{vect}}\{e_\gamma, n \notin N_\gamma\}$.

b) Montrons maintenant que ψ est Lipschitzienne.
Soit $x, y \in \text{vect}\{e_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned}
\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\psi(x)(n) - \psi(y)(n)| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} |(\text{dist}(x^+, Z_n) - \text{dist}(x^-, Z_n)) - (\text{dist}(y^+, Z_n) - \text{dist}(y^-, Z_n))| \\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |\text{dist}(x^+, Z_n) - \text{dist}(y^+, Z_n)| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |\text{dist}(x^-, Z_n) - \text{dist}(y^-, Z_n)| \\
&\leqslant \left\|x^+ - y^+\right\| + \left\|x^- - y^-\right\| \leqslant 2\|x - y\|
\end{aligned}$$

Ainsi ψ est 2-Lipschitzienne.

Finalement, nous avons montré qu'il existe $\psi : c_0(\mathbb{R}) \to X$ Lipschitzienne telle que $Q \circ \psi = Id_{X/c_0(\mathbb{N})}$. C'est-à-dire que Q admet un relèvement Lipschitzien.

5. Montrons que $X \underset{L}{\sim} c_0(\mathbb{N}) \oplus X/c_0(\mathbb{N}) (\equiv c_0(\mathbb{N}) \oplus c_0(\mathbb{R}))$:

Soit $T : \begin{array}{ccc} X & \to & c_0(\mathbb{N}) \oplus X/c_0(\mathbb{N}) \\ u & \mapsto & (u - \psi Q(u), Q(u)) \end{array}$

a) Commençons par montrer que T est bien à valeurs dans $c_0(\mathbb{N}) \oplus X/c_0(\mathbb{N})$.
· Pour $u \in X$, par définition de Q, $Q(u) \in X/c_0(\mathbb{N})$.
· De plus, ψQ est à valeurs dans X. Donc pour montrer que $u - \psi Q(u) \in c_0(\mathbb{N})$, nous allons montrer que $Q(u - \psi Q(u)) = 0$.
Rappelons que Q est linéaire et ψ est définie de telle façon que $Q\psi = Id_{X/c_0(\mathbb{N})}$.
Alors,

$$Q(u - \psi Q(u)) = Q(u) - Q\psi(Q(u)) = Q(u) - Q(u) = 0_{X/c_0(\mathbb{N})}$$

Donc $u - \psi Q(u) \in c_0(\mathbb{N})$.
Donc T est bien à valeurs dans $c_0(\mathbb{N}) \oplus X/c_0(\mathbb{N})$.

b) T est Lipschitzienne :
Soient $u, v \in X$.

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tv\| &= \|(u - \psi Q(u) - v + \psi Q(v), Q(u) - Q(v))\| \\
&\leqslant \|u - \psi Q(u) - v + \psi Q(v)\|_X + \|Q(u) - Q(v)\|_{X/c_0(\mathbb{N})} \\
&\leqslant \|u - v\|_X + \|\psi Q(v) - \psi Q(u)\|_X + \|Q(u) - Q(v)\|_{X/c_0(\mathbb{N})} \\
\psi \text{ 2-Lipschitzienne} \to &\leqslant \|u - v\|_X + 2\|Q(u) - Q(v)\|_{X/c_0(\mathbb{N})} + \|Q(u) - Q(v)\|_{X/c_0(\mathbb{N})} \\
\|Q\| = 1 \to &\leqslant 4\|u - v\|_X
\end{aligned}$$

Ainsi, T est Lipschitzienne.

c) T est injective.

d) Montrons que T est surjective :
Soit $(x, y) \in c_0(\mathbb{N}) \oplus X/c_0(\mathbb{N})$. Posons $u = x + \psi(y)$, alors $u \in X$.
De plus,

$$\begin{aligned}
T(u) &= (u - \psi Q(u), Q(u)) = (x + \psi(y) - \psi Q(x + \psi(y)), Q(x + \psi(y))) \\
&= (x + \psi(y) - \psi(Q(x) + Q\psi(y)), Q(x) + Q\psi(y)) \\
&= (x + \psi(y) - \psi(y), y) = (x, y)
\end{aligned}$$

car Q est linéaire, $Q\psi = Id_{X/c_0(\mathbb{N})}$ et comme $x \in c_0(\mathbb{N}), Q(x) = 0$.
Nous avons montré que T est une application Lipschitzienne bijective.

e) Il ne nous reste plus qu'à montrer que $T^{-1} : c_0(\mathbb{N}) \oplus X/c_0(\mathbb{N}) \to X$ est également Lipschitzienne.

Soient $(x, y), (x', y') \in c_0(\mathbb{N}) \oplus X/c_0(\mathbb{N})$.

$$\begin{array}{rcl}
\left\|T^{-1}(x,y) - T^{-1}(x',y')\right\|_\infty & = & \|x + \psi(y) - x' - \psi(y')\|_\infty \\
& = & \|(x - x') + (\psi(y) - \psi(y'))\|_\infty \\
& \leqslant & \|x - x'\|_\infty + \|\psi(y) - \psi(y')\|_\infty \\
\psi \text{ est 2-Lipschitzienne} \rightarrow & \leqslant & \|x - x'\|_\infty + 2\,\|y - y'\|_{X/c_0(\mathbb{N})} \\
& \leqslant & 3\,\|(x - x', y - y')\|_{c_0(\mathbb{N}) \oplus X/c_0(\mathbb{N})} \\
& \leqslant & 3\,\|(x, y) - (x', y')\|
\end{array}$$

Ainsi, T^{-1} est Lipschitzienne.

Finalement nous avons montré que T est une application bijective telle que T et T^{-1} sont Lipschitziennes. X et $c_0(\mathbb{N}) \oplus X/c_0(\mathbb{N})$ sont donc Lipschitz-équivalents.

6. De plus, comme $c_0(\mathbb{R})$ est linéairement isométrique à $X/c_0(\mathbb{N})$, $c_0(\mathbb{N}) \oplus c_0(\mathbb{R})$ est Lipschitz-équivalent à X.

   Or $c_0(\mathbb{N}) \oplus c_0(\mathbb{R})$ est linéairement isométrique à $c_0(\mathbb{R})$, donc $c_0(\mathbb{R})$ est Lipschitz-équivalent à un sous-espace vectoriel fermé de $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

□

Cependant dans le cas séparable la question suivante est toujours ouverte :

Question n°1' : Si deux espaces de Banach séparables sont Lipschitz-équivalents, sont-ils nécessairement isomorphes ?

Le point crucial de la démonstration précédente est l'étape 4. Si nous avions montré à cet endroit qu'il existe un relèvement linéaire de l'application quotient, le reste de la preuve s'adapterait pour montrer que les espaces sont isomorphes, ce qui n'est pas le cas.

De plus G. Godefroy et N.J. Kalton ont montré dans [3] que dans le cas séparable, s'il existe un relèvement Lipschitzien, alors il existe un relèvement linéaire. Donc pour construire un contre-exemple dans le cas séparable il ne faut pas utiliser cette méthode.

Chapitre 2

Espaces uniformément proches et uniformément homéomorphes

Dans ce Chapitre nous allons étudier une partie de l'article [4] de N.J. Kalton traitant des espaces proches et uniformément proches et donner des conditions suffisantes pour que des espaces soient uniformément homéomorphes.

2.1 Résultats préliminaires

Définition 2.1.1. *1. Soient (M, d) et (N, δ) deux espaces métriques et $f : M \to N$ une application.*

(a) Définissons $\omega_f : [0, +\infty[\to [0, +\infty]$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \omega_f(t) := \sup \{\delta(f(x), f(y)) \mid d(x, y) \leqslant t\}$$

*(b) f est **uniformément continue** si $\lim_{t\to 0} \omega_f(t) = 0$.*

*Remarquons que f est **Lipschitzienne** si : $\exists c > 0 : \forall t \in [0, +\infty[, \omega_f(t) \leqslant ct$.*

2. Soient X et Y deux espaces de Banach. Notons $\mathcal{H}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications positivement homogènes et bornées.

C'est-à-dire que $f \in \mathcal{H}(X, Y)$ si et seulement si :

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in X, f(\alpha x) = \alpha f(x)$$
$$\exists C > 0 : \forall x \in B_X, \|f(x)\|_Y \leqslant C \|x\|_X$$

Remarquons que $\mathcal{H}(X, Y)$ contient l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.

3. Notons $\mathcal{HU}(X, Y)$ l'ensemble des applications f de $\mathcal{H}(X, Y)$ telles que la restriction de f à B_X est uniformément continue.

4. Pour $0 < \varepsilon < 1$ et $f \in \mathcal{H}(X, Y)$, définissons $\|f\|_\varepsilon$ comme étant la plus petite constante positive L telle que :

$$\forall x, x' \in X, \|f(x) - f(x')\| \leqslant L \max \{\|x - x'\|, \varepsilon \|x\|, \varepsilon \|x'\|\}$$

Rappelons que pour une application f de X dans Y bornée, il est possible de définir la norme canonique de f par :

$$\|f\| = \sup \{\|f(x)\|, x \in B_X\}$$

Enonçons un Lemme utile pour la suite :

Lemme 2.1.2. *Soit X un espace de Banach. Soient $x, z \in X$. Alors,*

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| \leqslant 2 \frac{\|x - z\|}{\|x\|}$$

Si de plus $\|x\| \geqslant \|z\| > 0$, alors

$$\|x - z\| \leqslant \|x\| - \|z\| + \|z\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| \leqslant 3 \|x - z\|$$

Preuve :

· Soient $x, z \in X$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|x\|} + \frac{z}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| \leqslant \frac{1}{\|x\|} \|x - z\| + \left\| \frac{z \|z\|}{\|z\| \|x\|} - \frac{z \|x\|}{\|z\| \|x\|} \right\| \\ &\leqslant \frac{\|x - z\|}{\|x\|} + \frac{| \|z\| - \|x\| |}{\|x\|} \leqslant \frac{\|x - z\|}{\|x\|} + \frac{\|z - x\|}{\|x\|} = 2 \frac{\|x - z\|}{\|x\|} \end{aligned}$$

· Supposons maintenant que $\|x\| \geqslant \|z\| > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \|z\| \left\| \frac{x}{\|z\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| = \|z\| \left\| \frac{x}{\|z\|} - \frac{x}{\|x\|} + \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| \\ &\leqslant \|z\| \left\| \frac{x}{\|z\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| + \|z\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| \end{aligned}$$

De plus,

$$\|z\| \left\| \frac{x}{\|z\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|z\| \|x\| \left| \frac{1}{\|z\|} - \frac{1}{\|x\|} \right| = | \|x\| - \|z\| | = \|x\| - \|z\|$$

car $\|x\| \geqslant \|z\|$.

Ainsi, $\|x - z\| \leqslant \|x\| - \|z\| + \|z\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\|$.

De plus,

$$\|x - z\| \leqslant \|x\| - \|z\| + \|z\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| \leqslant \|x - z\| + \|z\| \, 2 \frac{\|x - z\|}{\|x\|} \leqslant 3 \|x - z\|$$

car $\|x\| \geqslant \|z\|$.

□

Proposition 2.1.3. *Soient X et Y deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{H}(X, Y)$. Si f est uniformément continue sur la sphère unité de X, alors $f \in \mathcal{HU}(X, Y)$.*

Preuve : Supposons f uniformément continue sur la sphère unité de X.

Comme $f \in \mathcal{H}(X, Y)$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in B_X$, $\|f(z)\| \leqslant C \|z\| \leqslant C$.

Soient x et y dans $B_X\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}
\|f(x)-f(y)\| &= \left\|\|x\|\,f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)-\|y\|\,f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|, \text{car } f \text{ homogène positive}\\
&\leqslant \left\|\|x\|\,f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)-\|x\|\,f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|+\left\|\|x\|\,f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)-\|y\|\,f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|\\
&\leqslant \|x\|\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)-f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|+\|x-y\|\,f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\\
&\leqslant \|x\|\,\omega_{f_{|S_X}}\left(\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|\right)+C\,\|x-y\|\\
&\leqslant \|x\|\,\omega_{f_{|S_X}}\left(2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}\right)+C\,\|x-y\|\\
&\leqslant 2\omega_{f_{|S_X}}\left(\|x-y\|\right)+C\,\|x-y\|
\end{aligned}$$

Or $f_{|S_X}$ est uniformément continue, donc $\omega_{f_{|S_X}}(\|x-y\|)$ tend vers 0 lorsque $\|x-y\|$ tend vers 0. Donc f est uniformément continue sur la boule unité de X.

□

Proposition 2.1.4. *Pour tout $0<\varepsilon<1$, $\|.\|_\varepsilon$ est une norme sur $\mathcal{H}(X,Y)$ qui est équivalente à la norme canonique.*

Plus précisément,

$$\forall f\in\mathcal{H}(X,Y), \|f\|\leqslant\|f\|_\varepsilon\leqslant 2\varepsilon^{-1}\|f\|$$

Preuve :

· Montrons que $\|.\|_\varepsilon$ est une norme :

(i) Soit $f\in\mathcal{H}(X,Y)$. Alors $\|f\|_\varepsilon$ est la plus petite constante L telle que

$$\forall x,x'\in X, \|f(x)-f(x')\|\leqslant L\max\{\|x-x'\|,\varepsilon\|x\|,\varepsilon\|x'\|\}$$

En particulier,

$$\forall x\neq x'\in X\setminus\{0\}, \|f\|_\varepsilon\geqslant\frac{\|f(x)-f(x')\|}{\max\{\|x-x'\|,\varepsilon\|x\|,\varepsilon\|x'\|\}}\geqslant 0$$

Donc pour tout $f\in\mathcal{H}(X,Y)$, $\|f\|_\varepsilon\geqslant 0$.

De plus,

$$\begin{aligned}
\|f\|_\varepsilon=0 &\implies \forall x,x'\in X, \|f(x)-f(x')\|=0\\
&\implies \forall x,x'\in X, f(x)=f(x')
\end{aligned}$$

Or comme $f\in\mathcal{H}(X,Y)$, $f(0)=0$, donc $\forall x\in X, f(x)=0$. D'où $f\equiv 0$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ et $\alpha > 0$.
Soient $x, x' \in X$.

$$\begin{aligned}
\|\alpha f(x) - \alpha f(x')\| &= \|f(\alpha x) - f(\alpha x')\| \text{ car } f \in \mathcal{H}(X,Y) \\
&\leqslant \|f\|_\varepsilon \max\{\|\alpha x - \alpha x'\|, \varepsilon\|\alpha x\|, \varepsilon\|\alpha x'\|\} \\
&= \|f\|_\varepsilon \max\{\alpha\|x - x'\|, \alpha\varepsilon\|x\|, \alpha\varepsilon\|x'\|\} \\
&= \alpha\|f\|_\varepsilon \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}
\end{aligned}$$

où $\|f\|_\varepsilon$ est la plus petite constante qui vérifie l'inégalité.

Comme $\|\alpha f\|_\varepsilon$ est la plus petite constante L telle que :

$$\forall x, x' \in X, \|\alpha(f(x) - f(x'))\| \leqslant L \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}$$

On en déduit que $\|\alpha f\|_\epsilon = \alpha\|f\|_\epsilon$.

Soit maintenant $\alpha < 0$. Soient $x, x' \in X$.

$$\begin{aligned}
\|\alpha f(x) - \alpha f(x')\| &= \|-\alpha f(x') - (-\alpha)f(x)\| \\
&= \|f(-\alpha x') - f(-\alpha x)\| \text{ car } f \in \mathcal{H}(X,Y) \\
&\leqslant \|f\|_\varepsilon \max\{\|-\alpha x' - (-\alpha)x\|, \varepsilon\|-\alpha x'\|, \varepsilon\|-\alpha x\|\} \\
&= |\alpha|\,\|f\|_\varepsilon \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}
\end{aligned}$$

où $\|f\|_\varepsilon$ est la plus petite constante qui vérifie l'inégalité.

Comme $\|\alpha f\|_\varepsilon$ est la plus petite constante L telle que :

$$\forall x, x' \in X, \|\alpha(f(x) - f(x'))\| \leqslant L \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}$$

On en déduit que $\|\alpha f\|_\epsilon = |\alpha|\,\|f\|_\epsilon$.
Finalement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_\varepsilon = |\alpha|\,\|f\|_\varepsilon$.

(iii) Soient $f, g \in \mathcal{H}(X,Y)$ et $x, x' \in X$. Alors

$$\begin{aligned}
\|(f+g)(x) - (f+g)(x')\| &\leqslant \|f(x) - f(x')\| + \|g(x') - g(x)\| \\
&\leqslant \|f\|_\varepsilon \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\} \\
&\quad + \|g\|_\varepsilon \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\} \\
&\leqslant (\|f\|_\varepsilon + \|g\|_\varepsilon) \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\|f + g\|_\varepsilon \leqslant \|f\|_\varepsilon + \|g\|_\varepsilon$

Finalement, $\|.\|_\varepsilon$ est une norme sur $\mathcal{H}(X,Y)$.

· Montrons maintenant que les normes sont équivalentes :
Pour tout $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\|f(x)\| &= \|f(x) - f(0)\| \leqslant \|f\|_\varepsilon \max\{\|x - 0\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|0\|\} \\
&\leqslant \|f\|_\varepsilon \|x\|, \text{ car } \varepsilon < 1 \\
&\leqslant \|f\|_\varepsilon, \text{ car } \|x\| \leqslant 1
\end{aligned}$$

Or, $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|, \|x\| \leqslant 1\}$. Donc $\|f\| \leqslant \|f\|_\epsilon$.

Soit $\eta > 0$. Alors il existe $x, x' \in X$ tels que

$$\|f(x) - f(x')\| > \|f\|_\varepsilon \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\} - \eta$$

On peut supposer $0 \neq \|x\| \geqslant \|x'\|$ et par positive homogénéité de f, $\|x\| \leqslant 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|f\|_\varepsilon \max\{\|x-x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\} - \eta < \|f(x)-f(x')\| &\leqslant \|f(x)\| + \|f(x')\| \\ &\leqslant \|x\|\left(\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| + \left\|f\left(\frac{x'}{\|x\|}\right)\right\|\right) \leqslant \|x\|\, 2\,\|f\|\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|f\|_\varepsilon \max\left\{\frac{\|x-x'\|}{\|x\|}, \varepsilon\right\} - \frac{\eta}{\|x\|} \leqslant 2\,\|f\|$$

Comme $\|x\| \leqslant 1$,

$$\|f\|_\varepsilon \max\left\{\frac{\|x-x'\|}{\|x\|}, \varepsilon\right\} - \eta \leqslant 2\,\|f\|$$

D'où, pour tout $\eta > 0$, on a $\varepsilon\|f\|_\varepsilon - \eta \leqslant 2\,\|f\|$.
Donc finalement, $\|f\|_\varepsilon \leqslant 2\varepsilon^{-1}\|f\|$.

□

Remarque 2.1.5.

1. Pour $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ fixé, l'application $\varepsilon \mapsto \|f\|_\varepsilon$ est décroissante.
2. Une application f de $\mathcal{H}(X,Y)$ est Lipschitzienne si et seulement si $\sup\limits_{\varepsilon>0}\|f\|_\varepsilon < +\infty$.

Preuve :

1. Soit $f \in \mathcal{H}(X,Y)$.
   Soit $\varepsilon' < \varepsilon$. Soit $x, x' \in X$. Alors
   $$\begin{aligned}\|f(x)-f(x')\| &\leqslant \|f\|_{\varepsilon'} \max\{\|x-x'\|, \varepsilon'\|x\|, \varepsilon'\|x'\|\} \\ &\leqslant \|f\|_{\varepsilon'} \max\{\|x-x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}\end{aligned}$$
   On en déduit donc que $\|f\|_\varepsilon \leqslant \|f\|_{\varepsilon'}$.
2. $\Rightarrow$ Supposons que $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ est Lipschitzienne. Alors
   $$\begin{aligned}\|f(x)-f(x')\| &\leqslant \mathrm{Lip}(f)\,\|x-x'\| \\ &\leqslant \mathrm{Lip}(f)\max\{\|x-x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\},\ \forall\varepsilon > 0\end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\|f\|_\varepsilon \leqslant \mathrm{Lip}(f)$. D'où $\sup\limits_{\varepsilon>0}\|f\|_\varepsilon \leqslant \mathrm{Lip}(f) < +\infty$.

   $\Leftarrow$ Supposons maintenant que $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ vérifie $L := \sup\limits_{\varepsilon>0}\|f\|_\varepsilon < +\infty$.
   Soient $x, x' \in X$ et $\varepsilon > 0$,
   $$\begin{aligned}\|f(x)-f(x')\| &\leqslant \|f\|_\varepsilon \max\{\|x-x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\} \\ &\leqslant L\max\{\|x-x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}\end{aligned}$$
   Ainsi, lorsque ε tend vers 0, pour tout $x, x' \in X$, $\|f(x)-f(x')\| \leqslant L\,\|x-x'\|$, donc f est Lipschitzienne.

□

Proposition 2.1.6. *Soient X, Y et Z des espaces de Banach.*
Soient $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ et $g \in \mathcal{H}(Y,Z)$. Alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, $\|gf\|_\varepsilon \leqslant \|f\|_\varepsilon\,\|g\|_\varepsilon$.

Preuve : Soient $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ et $g \in \mathcal{H}(Y,Z)$. Soit $0 < \varepsilon < 1$.
Soit $x, x' \in X$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|gf(x) - gf(x')\| &= \|g(f(x)) - g(f(x'))\| \\
&\leqslant \|g\|_\varepsilon \max\{\|f(x) - f(x')\|, \varepsilon\|f(x)\|, \varepsilon\|f(x')\|\} \\
&\leqslant \|g\|_\varepsilon \max\{\|f\|_\varepsilon \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}, \\
&\qquad\qquad \varepsilon\|f\|_\varepsilon \max\{\|x\|, \varepsilon\|x\|\}, \\
&\qquad\qquad \varepsilon\|f\|_\varepsilon \max\{\|x'\|, \varepsilon\|x'\|\}\} \\
&\leqslant \|g\|_\varepsilon \|f\|_\varepsilon \max\{\|x - x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}, \text{car } \varepsilon < 1
\end{aligned}$$

On en déduit donc $\|fg\|_\varepsilon \leqslant \|g\|_\varepsilon \|f\|_\varepsilon$.

□

Lemme 2.1.7. *Soient X, Y, Z et W des espaces de Banach.*
Soient $f \in \mathcal{H}(X,Y), g \in \mathcal{H}(Z,W)$ et $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(Y,Z)$. Notons $\omega(.) = \omega_{g_{|B_Z}}(.)$.
Si $K = \max\{\|h_1\|, \|h_2\|\}$, alors $\|gh_1f - gh_2f\| \leqslant K\|f\|\,\omega\left(\dfrac{\|h_1 - h_2\|}{K}\right)$.
En particulier, si $\varepsilon > 0$, $\|gh_1f - gh_2f\| \leqslant \|g\|_\varepsilon \|f\| (\|h_1 - h_2\| + K\varepsilon)$.

Preuve : Pour $x \in B_X$,

$$\|h_1f(x) - h_2f(x)\| = \|(h_1 - h_2)(f(x))\| \leqslant \|h_1 - h_2\|\,\|f(x)\| \leqslant \|h_1 - h_2\|\,\|f\|$$

Rappelons que

$$\omega_{g_{|B_Z}}\left(\frac{\|h_1 - h_2\|}{K}\right) = \sup\left\{\|g(z) - g(z')\| \mid z, z' \in B_Z, \|z - z'\| \leqslant \frac{\|h_1 - h_2\|}{K}\right\}$$

Comme ,

$$\|h_1f(x) - h_2f(x)\| \leqslant \|h_1 - h_2\|\,\|f\| = K\|f\|\frac{\|h_1 - h_2\|}{K}$$

on en déduit

$$\left\|\frac{h_1f(x)}{K\|f\|} - \frac{h_2f(x)}{K\|f\|}\right\| \leqslant \frac{\|h_1 - h_2\|}{K}$$

De plus,

$$\left\|\frac{h_1f(x)}{K\|f\|}\right\| = \left\|\frac{h_1f(x)}{\max\{\|h_1\|, \|h_2\|\}\|f\|}\right\| \leqslant \frac{\|f(x)\|}{\|f\|} \leqslant 1$$

De même, $\left\|\dfrac{h_2f(x)}{K\|f\|}\right\| \leqslant 1$.

Donc,

$$\left\|g\left(\frac{h_1f(x)}{K\|f\|}\right) - g\left(\frac{h_2f(x)}{K\|f\|}\right)\right\| \leqslant \omega\left(\frac{\|h_1 - h_2\|}{K}\right)$$

Ainsi, $\|gh_1f(x) - gh_2f(x)\| \leqslant K\|f\|\,\omega\left(\dfrac{\|h_1 - h_2\|}{K}\right)$.

Et finalement, $\|gh_1f - gh_2f\| \leqslant K\,\|f\|\,\omega\left(\dfrac{\|h_1-h_2\|}{K}\right)$.

Par définition de $\|.\|_\varepsilon$, on sait que $\forall z, z' \in Z$,

$$\|g(z)-g(z')\| \leqslant \|g\|_\varepsilon \max\{\|z-z'\|, \varepsilon\|z\|, \varepsilon\|z'\|\}$$

Ainsi, pour tout $y \in B_Y$,

$$\begin{aligned}
\|(gh_1-gh_2)(y)\| &= \|gh_1(y)-gh_2(y)\| \\
&\leqslant \|g\|_\varepsilon \max\{\|h_1(y)-h_2(y)\|, \varepsilon\|h_1(y)\|, \varepsilon\|h_2(y)\|\} \\
&\leqslant \|g\|_\varepsilon \max\{\|h_1-h_2\|, \varepsilon\|h_1\|, \varepsilon\|h_2\|\}, \text{ car } y \in B_Y \\
&\leqslant \|g\|_\varepsilon \max\{\|h_1-h_2\|, \varepsilon K\} \\
&\leqslant \|g\|_\varepsilon (\|h_1-h_2\| + \varepsilon K)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|gh_1-gh_2\| \leqslant \|g\|_\varepsilon(\|h_1-h_2\|+\varepsilon K)$.
De plus, $\|gh_1f-gh_2f\| \leqslant \|(gh_1-gh_2)(f)\| \leqslant \|gh_1-gh_2\|\,\|f\|$.
Donc, $\|gh_1f-gh_2f\| \leqslant \|g\|_\varepsilon(\|h_1-h_2\|+\varepsilon K)\,.\,\|f\|$

$\square$

Lemme 2.1.8. *Soient X et Y deux espaces de Banach et soit* $h : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathcal{HU}(X,Y) \\ t & \mapsto & f_t \end{array}$ *une application continue telle qu'il existe $K>0$ vérifiant :*

$$\forall t \geqslant 0, \|f_t\|_{e^{-2t}} \leqslant K \quad \textit{et} \quad \forall s,t \geqslant 0, \|f_t - f_s\| \leqslant K(|t-s| + e^{-2t} + e^{-2s})$$

Alors l'application $F : \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ccc} 0 & , & x=0 \\ f_0(x) & , & \|x\| \leqslant 1 \\ f_{\log\|x\|}(x) & , & \|x\|>1 \end{array}\right. \end{array}$ *est uniformément continue.*

Preuve :

1. Commençons par montrer que F est continue :
   Soit $\|x\| \leqslant 1$, alors $F(x) = f_0(x)$.
   De plus, $\|f_0\|_{e^0} = \|f_0\| \leqslant K$, donc $\|f_0(x)\| \leqslant K\,\|x\|$, ce qui montre la continuité de F en 0.

   Si $\|x\| = 1$, $\log\|x\| = 0$ et donc $F(x) = f_0(x) = f_{\log\|x\|}(x)$, d'où la continuité de F en 1.

   Comme les applications suivantes sont continues, F est continue : f_t pour $t \geqslant 0$, $t \mapsto f_t$, log et la norme.

2. Soient maintenant $\varepsilon > 0$ et $\delta_0 > 0$ tel que $K\delta_0 < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Soit alors $a > 1$ tel que $\dfrac{3K}{a} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

· Soient $\|x\| \geqslant \|z\| > a > 1$ tels que $\|x - z\| \leqslant \delta_0$. Alors

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(z)\| &= \left\| f_{\log\|x\|}(x) - f_{\log\|z\|}(z) \right\| \\
&\leqslant \left\| f_{\log\|x\|}(x) - f_{\log\|x\|}(z) \right\| + \left\| f_{\log\|x\|}(z) - f_{\log\|z\|}(z) \right\| \\
&\leqslant K \max \left\{ \|x - z\|, \frac{\|x\|}{\|x\|^2}, \frac{\|z\|}{\|x\|^2} \right\} \\
&\quad + K\|z\| \left(\log\|x\| - \log\|z\| + \frac{1}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|z\|^2} \right) \\
&\leqslant K \left(\max\left\{ \|x - z\|, \frac{1}{\|z\|} \right\} + \|z\| \log \frac{\|x\|}{\|z\|} + \frac{2}{\|z\|} \right)
\end{aligned}$$

De plus, $\|z\| \log \dfrac{\|x\|}{\|z\|} \leqslant \|x\| - \|z\| \leqslant \|x - z\|$, donc

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(z)\| &\leqslant K \left(\max\left\{ \|x - z\|, \frac{1}{\|z\|} \right\} + \|x - z\| + \frac{2}{\|z\|} \right) \\
&\leqslant 2K \|x - z\| + \frac{3K}{\|z\|} < 2K\delta_0 + \frac{3K}{a} < \varepsilon
\end{aligned}$$

· Soient $\|x\| \geqslant \|z\|$ et $\|z\| \leqslant a$.

Posons $b = \log(a+1)$, comme h est continue, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $0 \leqslant \sigma, \tau \leqslant b$ vérifiant $|\sigma - \tau| \leqslant \dfrac{b}{N}$, on ait $\|f_\sigma - f_\tau\| < \dfrac{\varepsilon}{3e^b}$.

Par continuité uniforme de f_t sur B_X pour tout t, on trouve $0 < \delta_1 < \min\left(\dfrac{b}{N}, \delta_0\right)$ tel que si $u, v \in B_X$ vérifient $\|u - v\| \leqslant \delta_1$, alors pour tout $0 \leqslant k \leqslant N$, $\left\| f_{kb/N}(u) - f_{kb/N}(v) \right\| < \dfrac{\varepsilon}{3e^b}$.

Supposons $\|x - z\| < \delta_1$. Alors $\|x\| < \delta_1 + a < 1 + a$.

– Si $\|x\| \leqslant 1$, $\|F(z) - F(x)\| = \|f_0(z) - f_0(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{3e^b} < \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

– Si $\|x\| > 1$, comme $\|x\|, \|z\| < a + 1$, il existe $0 \leqslant k \leqslant N$ tel que

$$|\log\|x\| - \frac{kb}{N}|, |\log\|z\| - \frac{kb}{N}| \leqslant \frac{b}{N}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left\| F(x) - f_{kb/N}(x) \right\| &= \left\| f_{\log\|x\|}(x) - f_{kb/N}(x) \right\| \leqslant \left\| f_{\log\|x\|} - f_{kb/N} \right\| \|x\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{3e^b} \|x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(a+1)}(a+1) = \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

De même, $\left\| F(z) - f_{kb/N}(z) \right\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. De plus, $\left\| f_{kb/N}(x) - f_{kb/N}(z) \right\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3e^b} < \dfrac{\varepsilon}{3}$, d'où

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(z)\| &\leqslant \left\| F(x) - f_{kb/N}(x) \right\| + \left\| f_{kb/N}(x) - f_{kb/N}(z) \right\| + \left\| f_{kb/N}(z) - F(z) \right\| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

En conclusion, F est uniformément continue.

□

2.2 Espaces proches et uniformément proches

Définition 2.2.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach.*

1. *Définissons $\mathcal{G}(X,Y)$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}(X,Y)$ formés des applications bijectives d'inverse dans $\mathcal{H}(Y,X)$.*
2. *$\mathcal{GU}(X,Y)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{G}(X,Y)$ formé des applications f de $\mathcal{HU}(X,Y)$ telles que f^{-1} appartient à $\mathcal{HU}(Y,X)$.*
3. *Pour $f \in \mathcal{G}(X,Y)$, définissons $[[f]] = \max\{\|f\|, \|f^{-1}\|\}$ et $[[f]]_\varepsilon = \max\{\|f\|_\varepsilon, \|f^{-1}\|_\varepsilon\}$.*
4. *Définissons alors une métrique sur $\mathcal{G}(X,Y)$:*
   Pour $f,g \in \mathcal{G}(X,Y)$, $\Delta(f,g) = \max\{\|f-g\|, \|f^{-1}-g^{-1}\|\}$.
5. *On dira que X et Y sont **L-proches** pour $L \geqslant 1$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in \mathcal{G}(X,Y)$ telle que $[[f]]_\varepsilon \leqslant L$.*
   *X et Y sont **proches** s'il existe $L \geqslant 1$ tel qu'ils soient L-proches.*
6. *De même X et Y sont **uniformément L-proches** pour $L \geqslant 1$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in \mathcal{GU}(X,Y)$ telle que $[[f]]_\varepsilon \leqslant L$.*
   *De plus, X et Y sont **uniformément proches** s'il existe $L \geqslant 1$ tel qu'ils soient uniformément L-proches.*

Lemme 2.2.2. *Soient X, Y et Z des espaces de Banach.*
Si X et Y sont proches (respectivement uniformément proches) et Y et Z sont proches (resp. uniformément proches). Alors X et Z sont proches (resp. uniformément proches).

Preuve : X et Y sont (uniformément) proches donc il existe $L_1 \geqslant 1$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f_1 \in \mathcal{G}(X,Y) \text{ (resp.} f_1 \in \mathcal{GU}(X,Y)) : [[f_1]]_\varepsilon \leqslant L$$

Y et Z sont (uniformément) proches donc il existe $L_2 \geqslant 1$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f_2 \in \mathcal{G}(Y,Z) \text{ (resp.} f_2 \in \mathcal{GU}(Y,Z)) : [[f_2]]_\varepsilon \leqslant L$$

Alors $f_2 \circ f_1$ appartient à $\mathcal{H}(X,Z)$ et sa bijection réciproque $f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$ appartient à $\mathcal{H}(Z,X)$. Donc $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{G}(X,Y)$.

(De plus si la restriction de f_1 à B_X est uniformément continue, alors il existe $R > 0$ tel que $f_1(B_X) \subset RB_Y$ et si la restriction de f_2 à B_Y est uniformément continue, alors f_2 est uniformément continue sur RB_Y. Ainsi, la restriction de $f_2 \circ f_1$ à B_X est uniformément continue. De même $f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$ est uniformément continue. Ainsi, $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{GU}(X,Z)$).

Finalement,

$$\begin{aligned}
[[f_2 \circ f_1]]_\varepsilon &= \max\left\{\|f_2 \circ f_1\|_\varepsilon, \left\|(f_2 \circ f_1)^{-1}\right\|_\varepsilon\right\} = \max\left\{\|f_2 \circ f_1\|_\varepsilon, \left\|f_1^{-1} \circ f_2^{-1}\right\|_\varepsilon\right\} \\
&\leqslant \max\left\{\|f_2\|_\varepsilon \|f_1\|_\varepsilon, \left\|f_1^{-1}\right\|_\varepsilon \left\|f_2^{-1}\right\|_\varepsilon\right\}, \text{d'après la Proposition 2.1.6} \\
&\leqslant \max\{L_2 L_1, L_1 L_2\} = L_1 L_2
\end{aligned}$$

Donc X et Z sont L_1L_2-(uniformément) proches.

□

Théorème 2.2.3. *Soient $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ et $(Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ deux suites d'espaces de Banach telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les espaces X_n et Y_n sont L-proches (respectivement uniformément L-proches).*

Alors, pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, les espaces $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p}$ et $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{\ell_p}$ sont proches (resp. uniformément proches).

De même, $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{c_0}$ et $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{c_0}$ sont (uniformément) proches.

En particulier, si X et Y sont (uniformément) proches, alors $\ell_p(X)$ et $\ell_p(Y)$ sont (uniformément) proches.

Preuve : Soit $1 \leqslant p < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Définissons une application $f : \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p} \to \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{\ell_p}$ telle que $\|f\|_\varepsilon \leqslant 3^{1/p}L$:

   Soit une suite $(\varepsilon_n)_{n=1}^{+\infty}$ telle que $\forall n \geqslant 1, 0 < \varepsilon_n \leqslant \varepsilon$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

   On sait que pour tout $n \geqslant 1$, X_n et Y_n sont (uniformément) L-proches, donc pour tout $n \geqslant 1$, il existe $f_n \in \mathcal{G}(\mathcal{U})(X, Y)$ tel que $[[f_n]]_{\varepsilon_n} \leqslant L$.

   Définissons l'application $f : \begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p} & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{\ell_p} \\ (x_n)_{n=1}^{+\infty} & \mapsto & (f_n(x_n))_{n=1}^{+\infty} \end{array}$.

   Soient $x = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ et $x' = (x'_n)_{n=1}^{+\infty} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(x')\|^p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(x_n) - f_n(x'_n)\|^p \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{\varepsilon_n}^p \max\{\|x_n - x'_n\|, \varepsilon_n \|x_n\|, \varepsilon_n \|x'_n\|\}^p \\
&\leqslant L^p \sum_{n=1}^{+\infty} \max\left\{\|x_n - x'_n\|^p, \varepsilon^p \|x_n\|^p, \varepsilon^p \|x'_n\|^p\right\} \\
&\leqslant L^p \left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n - x'_n\|^p\right) + \varepsilon^p \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p + \sum_{n=1}^{+\infty} \|x'_n\|^p\right)\right) \\
&= L^p \left(\|x - x'\|^p + \varepsilon^p(\|x\|^p + \|x'\|^p)\right) \\
&\leqslant 3L^p \max\left\{\|x - x'\|^p, \varepsilon^p \|x\|^p, \varepsilon^p \|x'\|^p\right\}
\end{aligned}$$

   Donc $\|f\|_\varepsilon \leqslant 3^{1/p}L$.

2. Montrons que f est bijective et que $\|f^{-1}\|_\varepsilon \leqslant 3^{1/p}L$:

   Commençons par montrer que l'application $g : \begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{\ell_p} & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p} \\ (y_n)_{n=1}^{+\infty} & \mapsto & (f_n^{-1}(y_n))_{n=1}^{+\infty} \end{array}$ est l'inverse de f.

   Soient $(y_n)_{n=1}^{+\infty} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{\ell_p}$ et $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p}$,

$$\begin{aligned}
f \circ g((y_n)_{n=1}^{+\infty}) &= f((f_n^{-1}(y_n))_{n\geqslant 1}) = (f_n \circ f_n^{-1}(y_n))_{n\geqslant 1} = (y_n)_{n=1}^{+\infty} \\
g \circ f((x_n)_{n=1}^{+\infty}) &= g((f_n(x_n))_{n\geqslant 1}) = (f_n^{-1} \circ f_n(x_n))_{n\geqslant 1} = (x_n)_{n=1}^{+\infty}
\end{aligned}$$

Donc l'application g ainsi définie est l'inverse de f.

De même que précédemment pour f, on montre que $\|f^{-1}\|_\varepsilon \leqslant 3^{1/p}L$.

Nous avons donc montré que si pour tout n, X_n et Y_n sont L-proches, alors pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, les espaces $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p}$ et $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{\ell_p}$ sont $3^{1/p}L$-proches.

3. Si pour tout n, X_n et Y_n sont uniformément L-proches, montrons que f et f^{-1} définies précédemment sont uniformément continues sur les boules unités.

Montrons que $\omega(t) := \sup\limits_{n\geqslant 1} \max\left\{\omega_{f_{n|B_{X_n}}}(t), \omega_{f^{-1}_{n|B_{Y_n}}}(t)\right\}$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.
Soit $\delta > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n et f_n^{-1} sont uniformément continues donc il existe $t_n > 0$ tel que pour tout $t \leqslant t_n, \max\left\{\omega_{f_{n|B_{X_n}}}(t), \omega_{f^{-1}_{n|B_{Y_n}}}(t)\right\} \leqslant \delta$.
Définissons pour tout $N \in \mathbb{N}, T_N = \min\{t_n, 1 \leqslant n \leqslant N\}$.
Alors pour tout $t \leqslant T_N$, $\sup\limits_{1\leqslant n\leqslant N} \max\left\{\omega_{f_{n|B_{X_n}}}(t), \omega_{f^{-1}_{n|B_{Y_n}}}(t)\right\} \leqslant \delta$.
Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $\varepsilon_n \leqslant \dfrac{\delta}{L}$.
De plus, pour tout $n \geqslant N_0$, on sait que $[[f_n]]_{\varepsilon_n} = \max\left\{\|f_n\|_{\varepsilon_n}, \|f_n^{-1}\|_{\varepsilon_n}\right\} \leqslant L$
En particulier, pour tout $x_n, x'_n \in B_{X_n}$,

$$\|f_n(x_n) - f_n(x'_n)\| \leqslant L \max\{\|x_n - x'_n\|, \varepsilon_n\|x_n\|, \varepsilon_n\|x'_n\|\}$$

Alors, pour tout $t \leqslant \dfrac{\delta}{L}$,

$$\begin{aligned}
\omega_{f_{n|B_{X_n}}}(t) &= \sup\{\|f_n(x_n) - f_n(x'_n)\| \mid x_n, x'_n \in B_{X_n}, \|x_n - x'_n\| \leqslant t\} \\
&\leqslant L \sup_{\substack{x_n, x'_n \in B_{X_n} \\ \|x_n - x'_n\| \leqslant t}} \max\{\|x_n - x'_n\|, \varepsilon_n\|x_n\|, \varepsilon_n\|x'_n\|\} \\
&\leqslant L \sup_{\substack{x_n, x'_n \in B_{X_n} \\ \|x_n - x'_n\| \leqslant t}} \max\{t, \varepsilon_n\} = L\max\{t, \varepsilon_n\} \\
&\leqslant L\max\left\{t, \frac{\delta}{L}\right\} = L\frac{\delta}{L} = \delta
\end{aligned}$$

De même,

$$\omega_{f_n^{-1}}(t) \leqslant \delta$$

Finalement, pour tout $t \leqslant \min\left\{\frac{\delta}{L}, T_{N_0}\right\}$,

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= \sup_{n\geqslant 1} \max\left\{\omega_{f_{n|B_{X_n}}}(t), \omega_{f^{-1}_{n|B_{Y_n}}}(t)\right\} \\
&= \max\left\{\sup_{1\leqslant n\leqslant N_0} \max\left\{\omega_{f_{n|B_{X_n}}}(t), \omega_{f^{-1}_{n|B_{Y_n}}}(t)\right\}, \sup_{n\geqslant N_0} \max\left\{\omega_{f_{n|B_{X_n}}}(t), \omega_{f^{-1}_{n|B_{Y_n}}}(t)\right\}\right\} \\
&\leqslant \delta
\end{aligned}$$

Ainsi, $\omega(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

En fait, d'après 2.1.3 il suffit de montrer que f est uniformément continue sur la sphère unité de $X := \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p}$.

Soit $\eta > 0$.

On a vu que $\omega(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0, donc il existe $\nu > 0$ tel que $3L\sqrt{\nu} + \omega(2\sqrt{\nu}) \leqslant \eta$.

Soient $x = (x_n)_{n \geqslant 1}$ et $x' = (x'_n)_{n \geqslant 1}$ dans S_X tels que $\|x - x'\| < \nu$. Montrons qu'alors $\|f(x) - f(x')\| < \eta$.

Posons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \ \|x_n - x'_n\| > \sqrt{\nu} \max\{\|x_n\|, \|x'_n\|\}\}$.

Alors,

$$\sum_{n \in A} \max\{\|x_n\|, \|x'_n\|\}^p < \frac{1}{\sqrt{\nu}^p} \sum_{n \in A} \|x_n - x'_n\|^p \leqslant \frac{1}{\sqrt{\nu}^p} \|x - x'\|^p < \frac{\nu^p}{\sqrt{\nu}^p} = \sqrt{\nu}^p$$

Autrement dit, $\left(\sum\limits_{n \in A} \max\{\|x_n\|, \|x'_n\|\}^p\right)^{1/p} \leqslant \sqrt{\nu}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \in A} \|f_n(x_n)\|^p\right)^{1/p} &\leqslant \left(\sum_{n \in A} L^p \|x_n\|^p\right)^{1/p} \leqslant L\sqrt{\nu} \\ \text{et} \quad \left(\sum_{n \in A} \|f_n(x'_n)\|^p\right)^{1/p} &\leqslant \left(\sum_{n \in A} L^p \|x'_n\|^p\right)^{1/p} \leqslant L\sqrt{\nu} \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\sum_{n \in A} \|f_n(x_n) - f_n(x'_n)\|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n \in A} \|f_n(x_n)\|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n \in A} \|f_n(x'_n)\|^p\right)^{1/p} \leqslant 2L\sqrt{\nu}$$

Si maintenant $n \notin A$, alors $\|x_n - x'_n\| \leqslant \sqrt{\nu} \max\{\|x_n\|, \|x'_n\|\}$.

Supposons $\|x_n\| \leqslant \|x'_n\|$. Alors

$$\begin{aligned} \|f_n(x_n) - f_n(x'_n)\| &= \left\| f_n(x_n) - f_n\left(\|x_n\| \frac{x'_n}{\|x'_n\|}\right) + f_n\left(\|x_n\| \frac{x'_n}{\|x'_n\|}\right) - \|x'_n\| f_n\left(\frac{x'_n}{\|x'_n\|}\right) \right\| \\ &\leqslant \|x_n\| \left\| f_n\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) - f_n\left(\frac{x'_n}{\|x'_n\|}\right) \right\| + \left\| f_n\left(\frac{x'_n}{\|x'_n\|}\right) \right\| \left| \|x_n\| - \|x'_n\| \right| \\ &\leqslant \|x_n\| \, \omega\left(\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x'_n}{\|x'_n\|} \right\|\right) + \left\| f_n\left(\frac{x'_n}{\|x'_n\|}\right) \right\| \|x_n - x'_n\| \end{aligned}$$

Or d'après le Lemme 2.1.2, $\left\| \dfrac{x_n}{\|x_n\|} - \dfrac{x'_n}{\|x'_n\|} \right\| \leqslant 2 \dfrac{\|x_n - x'_n\|}{\|x'_n\|}$.

De plus, on a déjà vu que pour $x_n^0 \in S_{X_n}$, $\|f_n(x_n^0)\| \leqslant L$. D'où

$$\|f_n(x_n) - f_n(x_n')\| \leqslant \|x_n\| \, \omega\left(2\frac{\|x_n - x_n'\|}{\|x_n'\|}\right) + L\,\|x_n - x_n'\|$$

Donc plus généralement,

$$\|f_n(x_n) - f_n(x_n')\| \leqslant L\,\|x_n - x_n'\| + \min\{\|x_n\|, \|x_n'\|\}\,\omega\left(\frac{2\,\|x_n - x_n'\|}{\max\{\|x_n\|, \|x_n'\|\}}\right)$$

Or $\max\{\|x_n\|, \|x_n'\|\} \geqslant \dfrac{\|x_n - x_n'\|}{\sqrt{\nu}}$, d'où $\dfrac{2\,\|x_n - x_n'\|}{\max\{\|x_n\|, \|x_n'\|\}} \leqslant 2\sqrt{\nu}$.
Finalement,

$$\|f_n(x_n) - f_n(x_n')\| \leqslant L\,\|x_n - x_n'\| + \min\{\|x_n\|, \|x_n'\|\}\,\omega\left(2\sqrt{\nu}\right)$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n\notin A} \|f_n(x_n) - f_n(x_n')\|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad\leqslant \left(\sum_{n\notin A} (L\,\|x_n - x_n'\| + \min\{\|x_n\|, \|x_n'\|\}\,\omega(2\sqrt{\nu}))^p\right)^{1/p} \\
&\qquad\leqslant L\left(\sum_{n\notin A} \|x_n - x_n'\|^p\right)^{1/p} + \omega(2\sqrt{\nu})\left(\sum_{n\notin A} \min\{\|x_n\|, \|x_n'\|\}^p\right)^{1/p} \\
&\qquad\leqslant L\,\|x - x'\| + \omega(2\sqrt{\nu})\max\{\|x\|, \|x'\|\} \leqslant L\,\|x - x'\| + \omega(2\sqrt{\nu}) \\
&\qquad\leqslant L\nu + \omega(2\sqrt{\nu})
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(x')\| &= \left(\sum_{n\notin A} \|f_n(x_n) - f_n(x_n')\|^p + \sum_{n\in A} \|f_n(x_n) - f_n(x_n')\|^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant L\nu + 2L\sqrt{\nu} + \omega(2\sqrt{\nu}) \\
&\leqslant \eta, \quad \text{par le choix de } \nu
\end{aligned}$$

En conclusion l'application $f : \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p} \to \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{\ell_p}$ est uniformément continue sur la boule unité de $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p}$. De la même façon il est possible de montrer que f^{-1} est uniformément continue sur la boule unité de $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{\ell_p}$. **Donc $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{\ell_p}$ et $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{\ell_p}$ sont uniformément $3^{1/p}L$-proches.**

4. <u>Traitons maintenant le cas de $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{c_0}$ et $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{c_0}$</u> : Définissons l'application f de la même façon.

Soient x et x' dans $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{c_0}$,

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(x')\| &= \sup_{n\geqslant 1}\|f_n(x_n)-f_n(x'_n)\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} L\max\{\|x_n-x'_n\|, \varepsilon_n\|x_n\|, \varepsilon_n\|x'_n\|\}\\ &\leqslant \sup_{n\geqslant 1} L\max\{\|x-x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}\\ &\leqslant L\max\{\|x-x'\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|x'\|\}\end{aligned}$$

Donc $\|f\|_\varepsilon \leqslant L$. De même, $\|f^{-1}\|_\varepsilon \leqslant L$. D'où $[[f]]_\varepsilon \leqslant L$ et les espace $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{c_0}$ et $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{c_0}$ sont L-proches.

Supposons les X_n et Y_n sont uniformément L-proches pour tout $n \geqslant 1$.
Soit $\eta > 0$. De la même façon que précédemment, $\omega(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0, donc il existe $t_0 > 0$ tel que $\omega(t_0) < \eta$.
Soient x et x' dans la boule unité de $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{c_0}$ tels que $\|x-x'\| < t_0$. Alors,

$$\|f(x)-f(x')\| = \sup_{n\geqslant 1}\|f_n(x_n)-f_n(x'_n)\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\omega_{f_{n|B_{X_n}}}(t_0) \leqslant \omega(t_0) < \eta$$

Donc f est uniformément continue sur la boule unité de $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{c_0}$. De même on peut montrer que f^{-1} est uniformément continue sur la boule unité de $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{c_0}$.

Donc $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right)_{c_0}$ et $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} Y_n\right)_{c_0}$ sont uniformément L-proches.

5. Cas particulier : si X et Y sont (uniformément) proches, alors $\ell_p(X)$ et $\ell_p(Y)$ sont (uniformément) proches.
   Il suffit d'appliquer le théorème avec pour tout $n \geqslant 1$, $X_n = X$ et $Y_n = Y$.

□

Définition 2.2.4. *Pour $f \in \mathcal{G}(X,Y)$, définissons $\hat{f}$ la version normalisée de f par*

$$\forall x \in X, \hat{f}(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \|x\|\dfrac{f(x)}{\|f(x)\|} & , x \neq 0 \end{cases}$$

Proposition 2.2.5. *Pour tout $f \in \mathcal{H}(X,Y)$, on a $\hat{f} \in \mathcal{G}(X,Y)$ et pour tout $x \in X$, $\|\hat{f}(x)\| = \|x\|$.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{H}(X,Y)$.

- Soit $\alpha > 0$.
  Si $x = 0$, $\hat{f}(\alpha x) = \hat{f}(0) = 0 = \alpha\hat{f}(x)$.
  Si $x \neq 0$, $\hat{f}(\alpha x) = \|\alpha x\|\dfrac{f(\alpha x)}{\|f(\alpha x)\|} = \alpha\|x\|\dfrac{\alpha f(x)}{\|\alpha f(x)\|} = \alpha\hat{f}(x)$, car f est homogène positive.
  Donc $\hat{f}$ est homogène positive.

· Soit $x \in B_X$, $\left\|\hat{f}(x)\right\| = \|x\| \leqslant 1$, donc $\hat{f}$ est bornée.

· Comme $f \in \mathcal{G}(X,Y)$, f^{-1} existe et appartient à $\mathcal{G}(Y,X)$.

Définissons alors $g : Y \to X$ par $g(y) = \begin{cases} 0 & , y = 0 \\ \|y\| \dfrac{f^{-1}(y)}{\|f^{-1}(y)\|} & , y \neq 0 \end{cases}$.

De même que pour $\hat{f}$, on montre que g est homogène positive.
En $y = 0$, $\hat{f} \circ g(y) = 0 = y$ et en $x = 0$, $g \circ \hat{f}(x) = 0 = x$.
De plus, pour tout $y \in Y \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \hat{f} \circ g(y) &= \hat{f}\left(\|y\| \frac{f^{-1}(y)}{\|f^{-1}(y)\|}\right) \overset{i}{=} \frac{\|y\|}{\|f^{-1}(y)\|}\hat{f}(f^{-1}(y)) \\ &= \frac{\|y\|}{\|f^{-1}(y)\|}\left\|f^{-1}(y)\right\| \frac{f(f^{-1}(y))}{\|f(f^{-1}(y))\|} = y \end{aligned}$$

$i)$ car $\hat{f}$ est positive homogène.

Pour tout $x \in X \setminus \{0\}$,

$$g \circ \hat{f}(x) = g\left(\|x\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|}\right) \overset{ii}{=} \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} g(f(x)) = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|}\|f(x)\| \frac{f^{-1}(f(x))}{\|f^{-1}(f(x))\|} = x$$

$ii)$ car g est homogène positive.
Ainsi, $g = \hat{f}^{-1} = \widehat{f^{-1}}$ est homogène positive et bornée. D'où $\hat{f} \in \mathcal{H}(X,Y)$.

Pour finir, pour tout $x \in X$, $\|\hat{f}(x)\| = \|x\|$

□

Lemme 2.2.6. *1. Si $f \in \mathcal{G}(X,Y)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{G}(X,Y)$ et $[[\hat{f}]]_\varepsilon \leqslant 2[[f]]_\varepsilon^2 + 1$.*

2. Pour f et g dans $\mathcal{G}(X,Y)$, on a $\Delta(\hat{f},\hat{g}) \leqslant 2[[f]]\Delta(f,g)$.

Preuve :

1. Soit $f \in \mathcal{G}(X,Y)$. Nous avons déjà vu que $\hat{f} \in \mathcal{G}(X,Y)$.

   Soit $x \neq 0$. Alors $\left\|\hat{f}(x) - \hat{f}(0)\right\| = \left\|\hat{f}(x)\right\| = \|x\| \leqslant \max\{\|x-0\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|0\|\}$.

   Donc $\left\|\hat{f}\right\|_\varepsilon \leqslant 1$. De même, $\left\|\hat{f}^{-1}\right\|_\varepsilon \leqslant 1$, donc $[[\hat{f}]]_\varepsilon \leqslant 1$.

Soient maintenant x et $x' \in X\setminus\{0\}$. On peut supposer $\|x\| \geqslant \|x'\|$.

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{f}(x)-\hat{f}(x')\right\| &= \left\|\|x\|\frac{f(x)}{\|f(x)\|}-\|x'\|\frac{f(x')}{\|f(x')\|}\right\| \\
&\overset{i}{\leqslant} \left|\left\|\|x\|\frac{f(x)}{\|f(x)\|}\right\|-\left\|\|x'\|\frac{f(x')}{\|f(x')\|}\right\|\right| \\
&\quad+\left\|\|x'\|\frac{f(x')}{\|f(x')\|}\right\|\left\|\frac{\frac{\|x\|f(x)}{\|f(x)\|}}{\left\|\|x\|\frac{f(x)}{\|f(x)\|}\right\|}-\frac{\frac{\|x'\|f(x')}{\|f(x')\|}}{\left\|\frac{\|x'\|f(x')}{\|f(x')\|}\right\|}\right\| \\
&\overset{ii}{\leqslant} \|x\|-\|x'\|+\|x\|\left\|\frac{f(x)}{\|f(x)\|}-\frac{f(x')}{\|f(x')\|}\right\| \\
&\overset{iii}{\leqslant} \|x-x'\|+2\|x\|\frac{\|f(x)-f(x')\|}{\|f(x)\|}
\end{aligned}$$

$i)$ et $iii)$ Lemme 2.1.2

$ii)$ car $\|x'\| \leqslant \|x\|$

Or, $[[f]]_\varepsilon = \max\{\|f\|_\varepsilon, \|f^{-1}\|_\varepsilon\}$ et $\|x\| = \|f^{-1}(f(x))\| \leqslant \|f^{-1}\|_\varepsilon \|f(x)\|$, d'où $\|x\| \leqslant [[f]]_\varepsilon \|f(x)\|$, et finalement $\dfrac{\|x\|}{\|f(x)\|} \leqslant [[f]]_\varepsilon$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{f}(x)-\hat{f}(x')\right\| &\leqslant \|x-x'\|+2[[f]]_\varepsilon\|f(x)-f(x')\| \\
&\leqslant \|x-x'\|+2[[f]]_\varepsilon\left([[f]]_\varepsilon\max\{\|x-x'\|,\varepsilon\|x\|,\varepsilon\|x'\|\}\right) \\
&\leqslant \left(2[[f]]_\varepsilon^2+1\right)\max\{\|x-x'\|,\varepsilon\|x\|,\varepsilon\|x'\|\}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\left\|\hat{f}\right\|_\varepsilon \leqslant 2[[f]]_\varepsilon^2+1$.

On montre de même que $\left\|\hat{f}^{-1}\right\|_\varepsilon \leqslant 2[[f]]_\varepsilon^2+1$. Finalement, $[[\hat{f}]]_\varepsilon \leqslant 2[[f]]_\varepsilon^2+1$.

2. Soient f et g dans $\mathcal{G}(X,Y)$. Rappelons que $\Delta(f,g) = \max\{\|f-g\|, \|f^{-1}-g^{-1}\|\}$. Soit $\|x\| = 1$.

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{f}(x)-\hat{g}(x)\right\| &= \left\|\|x\|\frac{f(x)}{\|f(x)\|}-\|x\|\frac{g(x)}{\|g(x)\|}\right\| = \|x\|\left\|\frac{f(x)}{\|f(x)\|}-\frac{g(x)}{\|g(x)\|}\right\| \\
&\leqslant 2\|x\|\frac{\|f(x)-g(x)\|}{\|f(x)\|} \leqslant 2[[f]]\,\|f(x)-g(x)\| \\
&\leqslant 2[[f]]\,\|f-g\| \leqslant 2[[f]]\Delta(f,g)
\end{aligned}$$

On montre de même que $\left\|\hat{f}^{-1}-\hat{g}^{-1}\right\| \leqslant 2[[f^{-1}]]\Delta(f^{-1},g^{-1}) = 2[[f]]\Delta(f,g)$.

D'où $\Delta(\hat{f},\hat{g}) \leqslant 2[[f]]\Delta(f,g)$

□

Définition 2.2.7. *Soient (M,d) et (N,δ) deux espaces métriques et $f : M \to N$ une application.*

*(a) f est **grossièrement continue** si pour tout $t > 0$, $\omega_f(t) < +\infty$.*

*(b) f est **grossièrement Lipschitzienne** s'il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \geqslant t_0$, $\omega_f(t) \leqslant ct$.*

*(c) f est de **CL-type** (L,ε) si pour tout $t \geqslant 0$, $\omega_f(t) \leqslant Lt + \varepsilon$.*

*(d) Une bijection f est un **homéomorphisme grossier** lorsque f et f^{-1} sont grossièrement continues.*
*Dans ce cas, on dit que f est un **CL-homéomorphisme de type** (L,ε) si f et f^{-1} sont de CL-type (L,ε).*

*(e) M et M' sont **presque Lipschitz-isomorphes** s'il existe L tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un CL-homéomorphisme entre M et M' de type (L,ε).*

Lemme 2.2.8. *Soient X et Y deux espaces de Banach.*
Soit $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ et $\varphi := f_{|S_X}$.

1. *Si φ est de CL-type (L,ε), où $L \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in S_X$, $\|\varphi(x)\| \leqslant K$, alors $[[f]]_\varepsilon \leqslant 2K + 4L$.*
2. *Si $\|f\|_\varepsilon = L$, alors φ est de CL-type $(L, L\varepsilon)$.*

Preuve :

1. Montrons que pour tout $x, z \in X$,
$$\|f(x) - f(z)\| \leqslant (2K + 4L)\max\{\|x-z\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|z\|\}$$
Soit alors $x, z \in X$.
$$\begin{aligned}\|f(x)-f(z)\| &= \left\|\|x\|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \|z\|\varphi\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right\| \\ &= \left\|(\|x\|-\|z\|)\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \|z\|\left(\varphi\left(\frac{x}{\|\|x}\right) - \varphi\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right)\right\| \\ &\leqslant K\|x-z\| + \|z\|\left\|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \varphi\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right\|, \text{car } \frac{x}{\|x\|} \in S_X\end{aligned}$$
De plus φ est de CL-type (L,ε), donc $\omega_f\left(\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|}\right\|\right) \leqslant L\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|}\right\| + \varepsilon$.
Donc
$$\|f(x)-f(z)\| \leqslant K\|x-z\| + \|z\|L\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|}\right\| + \varepsilon\|z\|$$
Or d'après le Lemme 2.1.2, $\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|}\right\| \leqslant 2\frac{\|x-z\|}{\|z\|}$. De plus $\|z\| \leqslant \max\{\|x\|, \|z\|\}$.
D'où
$$\begin{aligned}\|f(x)-f(z)\| &\leqslant (K+2L)\|x-z\| + \varepsilon\|z\| \\ &\leqslant (2K+4L)\max\{\|x-z\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|z\|\}\end{aligned}$$
car $L \geqslant 1$

Ainsi, $\|f\|_\varepsilon \leqslant 2K + 4L$.

2. Soient x et z dans S_X.

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - \varphi(z)\| &\leqslant \|f\|_\varepsilon \max\{\|x-z\|, \varepsilon\|x\|, \varepsilon\|z\|\} = L\max\{\|x-z\|, \varepsilon\} \\ &\leqslant L\|x-z\| + L\varepsilon\end{aligned}$$

Donc φ est de CL-type $(L, L\varepsilon)$.

□

Proposition 2.2.9. *Soient X et Y deux Banach tels que leur sphères unités soient uniformément presque Lipschitz-isomorphes. Alors X et Y sont uniformément proches.*

Preuve : Supposons que S_X et S_Y sont uniformément presque Lipschitz isomorphes. Alors il existe un homéomorphisme uniforme $\varphi : S_X \to S_Y$, il existe L et $\varepsilon > 0$ tels que φ et φ^{-1} sont de CL-type (L, ε). C'est-à-dire que pour tout $t \geqslant 0$, $\omega_\varphi(t) \leqslant Lt + \varepsilon$ et $\omega_{\varphi^{-1}}(t) \leqslant Lt + \varepsilon$.

Montrons que X et Y sont uniformément proches, c'est-à-dire qu'il existe L tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $f \in \mathcal{GU}(X, Y)$ tel que $[[f]]_\varepsilon \leqslant L$.

Définissons f : $\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & \|x\|\varphi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\end{array}$

- f est bijective de bijection réciproque $y \mapsto \|y\|\varphi^{-1}\left(\dfrac{y}{\|y\|}\right)$.
- f et f^{-1} sont positives homogènes : soient $x \in X$ et $\alpha > 0$,

$$f(\alpha x) = \|\alpha x\|\varphi\left(\frac{\alpha x}{\|\alpha x\|}\right) = \alpha\|x\|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \alpha f(x)$$

  de même pour montrer que f^{-1} est positive homogène.
- f et f^{-1} sont bornées : soit $x \in B_X$:

$$\|f(x)\| = \left\|\|x\|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\|\left\|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\| \leqslant 1, \text{ car } \varphi \text{ à valeurs dans } S_Y$$

  de même pour montrer que f^{-1} est bornée.
- Montrons que les restrictions de f et f^{-1} à B_X et B_Y respectivement sont uniformément continues.
  Nous avons déjà vu que pour montrer qu'une fonction est uniformément continue sur la boule unité, il suffit de montrer qu'elle est uniformément continue sur la sphère unité. Or pour $x \in S_X$, $f(x) = \|x\|\varphi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) = \varphi(x)$, et comme φ est uniformément continue on en déduit que f est uniformément continue sur S_X. De même f^{-1} est uniformément continue sur B_Y.

Ainsi, $f \in \mathcal{GU}(X, Y)$.

Soient $x, z \in X$. On peut supposer $\|z\| \leqslant \|x\|$. Alors

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(z)\| &= \left\| \|x\| \, \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \|z\| \, \varphi\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| \\
&= \left\| \|x\| \left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \varphi\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right) - \varphi\left(\frac{z}{\|z\|}\right) (\|z\| - \|x\|) \right\| \\
&\leqslant \|x\| \left\| \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \varphi\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| + \left\| \varphi\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| \|z - x\| \\
&\leqslant \|x\| \, \omega_\varphi\left(\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| \right) + \|z - x\| \\
&\leqslant \|x\| \left(L \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| + \varepsilon \right) + \|z - x\| \\
&\leqslant (L+1) \|z - x\| + \varepsilon \|x\| \\
&\leqslant (2L+2) \max\{\|z - x\|, \varepsilon \|x\|, \varepsilon \|z\|\}
\end{aligned}$$

Ainsi $\|f\|_\varepsilon \leqslant 2L+2$. On montre de même que $\|f^{-1}\|_\varepsilon \leqslant 2L+2$, d'où $[[f]]_\varepsilon \leqslant 2L+2$.

Finalement, X et Y sont uniformément proches.

□

2.3 Lien entre espaces uniformément proches et uniformément homéomorphes

Démontrons maintenant un théorème du à Nahum qui lie l'uniforme proximité et l'uniforme homéomorphie :

Théorème 2.3.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach uniformément homéomorphes. Alors les espaces $X \oplus \mathbb{R}$ et $Y \oplus \mathbb{R}$ sont uniformément proches.*

Preuve : Comme X et Y sont uniformément homéomorphes, il existe $\psi : X \to Y$ bijective telle que ψ et ψ^{-1} sont uniformément continue. En particulier il existe L et C telle que pour tout $t > 0$, $\omega_\psi(t), \omega_{\psi^{-1}}(t) \leqslant Lt + C$.

Les applications ψ et ψ^{-1} sont Lipschitziennes aux grandes distances : il existe $K > 1$ tel que pour tout $x, z \in X$,

$$\|x - z\| \geqslant 1 \text{ ou } \|\psi(x) - \psi(z)\| \geqslant 1 \Rightarrow \frac{\|x - z\|}{K} \leqslant \|\psi(x) - \psi(z)\| \leqslant K \|z - x\|$$

On peut supposer $\psi(0) = 0$.

1. Définissons $C := \{(x,t) \in X \oplus \mathbb{R} | x \in X, 0 \leqslant \|x\| \leqslant t \leqslant 1\}$ et notons $X' = X \oplus \mathbb{R}$. De même, $D = \{(y,s) \in Y \oplus \mathbb{R} | y \in Y, 0 \leqslant \|y\| \leqslant s \leqslant 1\}$ et $Y' = Y \oplus \mathbb{R}$.
   Alors la frontière de C (respectivement de D) est Lipschitz-équivalente à la sphère de X' (resp. de Y').
   Soit $f_X : \partial C \setminus \{0,0\} \to X$ définie par :

$$\forall (x,t) \in \partial C \setminus \{0,0\}, f_X(x,t) = \begin{cases} x & , t = 1 \\ \dfrac{x}{\|x\|^2} & , t = \|x\| < 1 \end{cases}$$

Alors f_X est bijective et son inverse est $f_X^{-1} : X \to \partial C\setminus\{0,0\}$ définie par :

$$\forall x \in X, f_X^{-1}(x) = \begin{cases} (x,1) & ,\|x\| \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\|x\|^2}(x,\|x\|) & ,\|x\| > 1 \end{cases}$$

En effet, soit $(x,t) \in \partial C\setminus\{0,0\}$,

· t=1

$$f_X^{-1}(f_X(x,t)) = f_X^{-1}(x) = \begin{cases} (x,1) & ,\|x\| \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\|x\|^2}(x,\|x\|) & ,\|x\| > 1 \end{cases}$$

Or $(x,t) \in \partial C\setminus\{0,0\}$, donc en particulier $\|x\| \leqslant 1$. D'où

$$f_X^{-1}(f_X(x,1)) = f_X^{-1}(x) = (x,1)$$

· $t = \|x\| < 1$

$$\begin{aligned} f_X^{-1}(f_X(x,t)) = f_X^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) &= \frac{1}{\left\|\dfrac{x}{\|x\|^2}\right\|^2}\left(\frac{x}{\|x\|^2}, \left\|\frac{x}{\|x\|^2}\right\|\right), \text{car } \left\|\frac{x}{\|x\|^2}\right\| = \frac{1}{\|x\|} > 1 \\ &= \|x\|^2\left(\frac{x}{\|x\|^2}, \frac{\|x\|}{\|x\|^2}\right) = (x,\|x\|) = (x,t) \end{aligned}$$

Donc $f_X^{-1} \circ f_X = \mathrm{Id}_{\partial C\setminus\{0,0\}}$.

Soit $x \in X$,

· Si $\|x\| \leqslant 1$, alors $f_X(f_X^{-1}(x)) = f_X(x,1) = x$.

· Si $\|x\| > 1$,

$$\begin{aligned} f_X(f_X^{-1}(x)) = f_X\left(\frac{1}{\|x\|^2}(x,\|x\|)\right) &= \frac{\dfrac{x}{\|x\|^2}}{\left\|\dfrac{x}{\|x\|^2}\right\|^2}, \text{ car } \left\|\frac{x}{\|x\|^2}\right\| = \frac{1}{\|x\|} < 1 \\ &= x \end{aligned}$$

Finalement, f_X^{-1} ainsi définie est bien l'inverse de f_X.

De même définissons les applications $f_Y : \partial D\setminus\{0,0\} \to Y$ et f_Y^{-1} de la manière suivante :

$$f_Y(y,t) = \begin{cases} y & ,t = 1 \\ \dfrac{y}{\|y\|^2} & ,t = \|y\| < 1 \end{cases} \qquad f_Y^{-1}(y) = \begin{cases} (y,1) & ,\|y\| \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\|y\|^2}(y,\|y\|) & ,\|y\| > 1 \end{cases}$$

2. Soit $\varphi : \partial C \to \partial D$ définie par $\varphi = f_Y^{-1} \circ \psi \circ f_X$ sur $\partial C\setminus\{0,0\}$ et $\varphi(0,0) = (0,0)$.

· Montrons que φ est continue en $(0,0)$: Soit $0 < \alpha < 1$.
Soit $U = \left\{(x,t) \in \partial C \backslash \{(0,0)\} \mid \|x\| = t < \dfrac{\alpha}{K}\right\}$.
Alors pour tout $(x,t) \in U$, $f_X(x,t) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$. Comme ψ et ψ^{-1} sont Lipschitziennes aux grandes distances et que $\|f_X(x,t)\| = \left\|\dfrac{x}{\|x\|^2}\right\| = \dfrac{1}{\|x\|} > \dfrac{K}{\alpha} > 1$, on a

$$1 < \frac{1}{\alpha} < \frac{\|f_X(x,t)\|}{K} \leqslant \|\psi(f_X(x,t))\| \leqslant K\|f_X(x,t)\|$$

Donc

$$\varphi(x,t) = f_Y^{-1}(\psi(f_X(x,t))) = \frac{1}{\|\psi(f_X(x,t))\|^2}(\psi(f_X(x,t)), \|\psi(f_X(x,t))\|)$$

D'où $\|\varphi(x,t)\| = \dfrac{1}{\|\psi(f_X(x,t))\|} \leqslant \dfrac{K}{\|f_X(x,t)\|} < \alpha$ et $\varphi(U) \subset B_{X'}(0,\alpha) \cap \partial D$.
Ainsi φ est continue en $(0,0)$.

· Montrons que pour tout $0 < \lambda \leqslant 1$, φ est uniformément continue sur $A_\lambda := \{(x,t) \in \partial C | t \geqslant \lambda\}$

(a) Montrons que f_X est uniformément continue sur A_λ.
Soit $(x,t), (y,s) \in A_\lambda$.
– Si $t = s = 1$, alors $\|f_X(x,t) - f_X(y,s)\| = \|x - y\| \leqslant \|(x,t) - (y,s)\|$.
– Si $t, s < 1$, alors $\|f_X(x,t) - f_X(y,s)\| = \left\|\dfrac{x}{\|x\|^2} - \dfrac{y}{\|y\|^2}\right\|$. De plus l'application $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$ est uniformément continue sur $\{x | \|x\| > \lambda\}$, $\forall 0 < \lambda \leqslant 1$.
– Si $t = 1$ et $s < 1$, soit $z := \dfrac{y}{\|y\|}$. Alors,

$$\|f_X(x,t) - f_X(y,s)\| \leqslant \|f_X(x,t) - f_X(z,1)\| + \|f_X(z,1) - f_X(y,s)\|$$

Grâce aux 2 cas précédents, chacun des termes donne l'uniforme continuité de f_X dans ce cas là.
Finalement, f_X est uniformément continue sur A_λ, pour tout $0 < \lambda \leqslant 1$.

(b) ψ est uniformément continue sur X.

(c) Il ne reste donc plus qu'à montrer que f_Y^{-1} est uniformément continue sur $\psi \circ f_X(A_\lambda)$ pour prouver que φ est uniformément continue.
– Si $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$, alors $\left\|f_Y^{-1}(x) - f_Y^{-1}(y)\right\| = \|(x,1) - (y,1)\| = \|x - y\|$.
– Si $\|x\|, \|y\| \geqslant 1$, alors $\left\|f_Y^{-1}(x) - f_Y^{-1}(y)\right\| = \left\|\left(\dfrac{x}{\|x\|^2}, \dfrac{1}{\|x\|}\right) - \left(\dfrac{y}{\|y\|^2}, \dfrac{1}{\|y\|}\right)\right\|$
Or les applications $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\|x\|}$ sont uniformément continue sur $\{x | \|x\| \geqslant 1\}$.

– Si $\|x\| \leqslant 1$ et $\|y\| \geqslant 1$, alors

$$\left\|f_Y^{-1}(x) - f_Y^{-1}(y)\right\| \leqslant \left\|f_Y^{-1}(x) - f_Y^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| + \left\|f_Y^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - f_Y^{-1}(y)\right\|$$

Grâce aux 2 cas précédents, chacun des termes donne l'uniforme continuité de f_Y^{-1} dans ce cas là.

Finalement, f_Y^{-1} est uniformément continue.

Ainsi, φ est uniformément continue sur A_λ, pour tout $0 < \lambda \leqslant 1$

· Montrons maintenant que φ est uniformément continue sur ∂C :
Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est continue en $(0,0)$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|(z,r)\| \leqslant \alpha$, alors $\|\varphi(z,r)\| < \frac{\varepsilon}{4}$. De plus, φ est uniformément continue sur A_α, donc il existe $\delta > 0$ tel que si $(x,t),(y,s) \in A_\alpha$ et $\|(x,t)-(y,s)\| < 2\delta$, alors

$$\|\varphi(x,t) - \varphi(y,s)\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Déduisons-en que φ est uniformément continue sur ∂C :
Soient $(x,t),(y,s) \in \partial C$ tels que $\|(x,t)-(y,s)\| < \delta$,

a) Si $s,t \leqslant \alpha$,

$$\|\varphi(x,t) - \varphi(y,s)\| \leqslant \|\varphi(x,t)\| + \|\varphi(y,s)\| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(Indépendamment de $\|(x,t)-(y,s)\|$).

b) Si $s,t \geqslant \alpha$. Alors $(x,t),(y,s) \in A_\alpha$ et $\|(x,t)-(y,s)\| < \delta < 2\delta$, donc

$$\|\varphi(x,t) - \varphi(y,s)\| < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

c) Si $t > \alpha$ et $s < \alpha$,

– Alors les points $\left(\frac{t}{\|y\|}y, t\right)$ et (x,t) sont dans A_α, de plus

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{t}{\|y\|}y,t\right) - (x,t)\right\| = \left\|\frac{\|x\|}{\|y\|}y - x\right\| = \|x\|\left\|\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}\right\| &\leqslant 2\|x-y\| \\ &\leqslant 2\|(x,t)-(y,s)\| < 2\delta, \text{ d'après le Lemme 2.1.2}\end{aligned}$$

Donc d'après ce qui précède, $\left\|\varphi\left(\frac{t}{\|y\|}y,t\right) - \varphi(x,t)\right\| < \frac{\varepsilon}{4}$

– Le point $\left(\frac{\alpha}{\|y\|}y, \alpha\right)$ appartient également à A_α et

$$\left\|\left(\frac{t}{\|y\|}y,t\right) - \left(\frac{\alpha}{\|y\|}y,\alpha\right)\right\| = |t-\alpha| < t - s < \frac{\delta}{2} < 2\delta$$

Donc $\left\|\varphi\left(\frac{t}{\|y\|}y,t\right) - \varphi\left(\frac{\alpha}{\|y\|}y,\alpha\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{4}$.

– De plus d'après a), $\left\|\varphi\left(\frac{\alpha}{\|y\|}y,\alpha\right)-\varphi(y,s)\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc

$$\underbrace{\|\varphi(x,t)-\varphi(y,s)\| \leqslant \left\|\left(\frac{t}{\|y\|}y,t\right)-(x,t)\right\| + \left\|\varphi\left(\frac{t}{\|y\|}y,t\right)-\varphi\left(\frac{\alpha}{\|y\|}y,\alpha\right)\right\| + \left\|\varphi\left(\frac{\alpha}{\|y\|}y,\alpha\right)-\varphi(y,s)\right\|}_{<\varepsilon}$$

Finalement, pour tout $\varepsilon>0$, il existe δ tel que pour tout $(x,t),(y,s)\in\partial C$, si $\|(x,t)-(y,s)\|<\delta$, alors $\|\varphi(x,t)-\varphi(y,s)\|<\varepsilon$. Donc φ est uniformément continue sur ∂C tout entier.

En résumé, nous avons montré qu'il existe une constante L_1 telle que

$$\omega_\varphi(t)\leqslant L_1\omega_\psi(t)\leqslant L_1Lt+L_1C \quad\text{et}\quad \omega_\varphi^{-1}(t)\leqslant L_1\omega_{\psi^{-1}}(t)\leqslant L_1Lt+L_1C$$

3. Comme nous avons vu que ∂C et $S_{X'}$ sont Lipschitz-isomorphes (tout comme ∂D et $S_{Y'}$) nous pouvons supposons que φ est définie sur $S_{X'}$ à valeurs dans $S_{Y'}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $\psi_n : \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & \frac{1}{n}\psi(nx)\end{array}$. ψ_n est uniformément continue, donc de la même façon que précédemment il est possible de construire

$$\varphi_n : S_{X'}\to S_{Y'}$$

Alors $\omega_{\varphi_n}(t)\leqslant \frac{1}{n}\omega_\varphi(nt)\leqslant L_1Lt+\frac{1}{n}L_1C$ et $\omega_{\varphi_n^{-1}}(t)\leqslant L_1Lt+\frac{1}{n}L_1C$. C'est-à-dire que φ_n et φ_n^{-1} sont de CL-type $(L_1L,\frac{L_1C}{n})$, donc $S_{X'}$ et $S_{Y'}$ sont presque Lipschitz isomorphes. D'après la Proposition 2.2.9, X' et Y' sont uniformément proches.

□

Proposition 2.3.2. *Soient X et Y deux espaces de Banach tels qu'il existe une constante $L\geqslant 0$ et pour tout $t\geqslant 0$, il existe $f_t\in\mathcal{GU}(X,Y)$ tels que*

$$\begin{aligned} \forall t\geqslant 0,&\qquad [[f_t]]_{e^{-2t}}\leqslant L\\ \forall s,t\geqslant 0,&\qquad \Delta(f_t,f_s)\leqslant L(|t-s|+e^{-2t}+e^{-2s})\end{aligned}$$

et les applications $t\mapsto f_t$ et $t\mapsto f_t^{-1}$ sont continues.

Alors X et Y sont uniformément homéomorphes.

Preuve : La famille $(\hat{f}_t)_{t\geqslant 0}$ vérifie les mêmes hypothèses que la famille $(f_t)_{t\geqslant 0}$:

· Nous avons déjà vu que si $f_t\in\mathcal{GU}(X,Y)$, alors $\hat{f}_t\in\mathcal{GU}(X,Y)$.

· D'après le Lemme 2.2.6, $[[\hat{f}_t]]_{e^{-2t}}\leqslant 2[[f]]^2_{e^{-2t}}+1\leqslant 2L^2+1:=K$.

· D'après le même Lemme,

$$\Delta(\hat{f}_t,\hat{f}_s)\leqslant 2[[f_t]]\Delta(f_t,f_s)\leqslant 2L^2(|t-s|+e^{-2t}+e^{-2s})\leqslant K(|t-s|+e^{-2t}+e^{-2s})$$

· De plus comme les applications $t \mapsto f_t$ et $t \mapsto f_t^{-1}$ sont continues, les applications $t \mapsto \hat{f}_t$ et $t \mapsto \widehat{f_t^{-1}}$ le sont également.

Alors d'après le Lemme 2.1.8 les applications $F : \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \hat{f}_0(x) & , \|x\| \leqslant 1 \\ \hat{f}_{\log\|x\|}(x) & , \|x\| > 1 \end{cases} \end{array}$ et $G : \begin{array}{ccc} Y & \to & X \\ y & \mapsto & \begin{cases} 0 & , y = 0 \\ \widehat{f_0^{-1}}(y) & , \|y\| \leqslant 1 \\ \widehat{f^{-1}}_{\log\|y\|}(y) & , \|y\| > 1 \end{cases} \end{array}$ sont uniformément continues.

Montrons qu'alors $G = F^{-1}$.
Tout d'abord rappelons que pour tout f, $\widehat{f^{-1}} = \hat{f}^{-1}$ et que pour tout z, $\|\hat{f}(z)\| = \|z\|$.

· Soit $y \in Y$ tel que $\|y\| \leqslant 1$.
Alors $F \circ G(y) = F(\hat{f_0}^{-1}(y))$ et de plus $\left\|\hat{f_0}^{-1}(y)\right\| = \|y\| \leqslant 1$, donc

$$F \circ G(y) = \hat{f}_0(\hat{f_0}^{-1}(y)) = y$$

· Si $\|y\| > 1$, alors

$$F \circ G(y) = F(\hat{f}^{-1}_{\log\|y\|}(y)) = \hat{f}_{\log\left\|\hat{f}^{-1}_{\log\|y\|}(y)\right\|}(\hat{f}^{-1}_{\log\|y\|}(y)) = \hat{f}_{\log\|y\|}(\hat{f}^{-1}_{\log\|y\|}(y)) = y$$

· Soit $x \in X$ tel que $\|x\| \leqslant 1$. Alors

$$G \circ F(x) = G(\hat{f}_0(x)) = \hat{f}_0^{-1}(\hat{f}_0(x)) = x$$

· Si $\|x\| > 1$, alors

$$G \circ F(x) = G(\hat{f}_{\log\|x\|}(x)) = \hat{f}^{-1}_{\log\left\|\hat{f}_{\log\|x\|}(x)\right\|}(\hat{f}_{\log\|x\|}(x)) = \hat{f}^{-1}_{\log\|x\|}(\hat{f}_{\log\|x\|}(x)) = x$$

Donc $G = F^{-1}$, ainsi F est un homéomorphisme uniforme entre X et Y.

□

Théorème 2.3.3. *Soient X, Y et Z trois espaces de Banach tels que X et $X \oplus Y$ sont uniformément proches et Y et $Y \oplus Z$ sont linéairement isomorphes. Alors X^2 et $X^2 \oplus Z$ sont uniformément homéomorphes.*

Preuve : Le but de cette démonstration est de construire une famille $(f_t)_{t \geqslant 0}$ d'application de $\mathcal{GU}(X^2, X^2 \oplus Z)$ vérifiant les hypothèses de la Proposition 2.3.2.

Remarque 2.3.4. Pour les sommes directes nous utiliserons la norme infinie.

· Comme X et $X \oplus Y$ sont uniformément proches, il existe une constante $L \geqslant 1$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $f \in \mathcal{GU}(X, X \oplus Y)$ telle que $[[f]]_\varepsilon \leqslant L$.
De plus, il existe un isomorphisme $T = (T_Y, T_Z) : Y \to Y \oplus Z$, et il est possible de choisir L de telle façon que $\|T\|, \|T^{-1}\| \leqslant L$.

Soit $\varepsilon > 0$.

· Pour $g = (g_X, g_Y) \in \mathcal{GU}(X, X \oplus Y)$, définissons

$$\Phi_g : \begin{array}{ccc} X & \to & X \oplus Z \\ x & \mapsto & \left(g^{-1}\left(g_X(x), T_Y(g_Y(x))\right), T_Z(g_Y(x))\right) \end{array}$$

Alors Φ_g appartient à $\mathcal{GU}(X, X \oplus Z)$ comme composée d'application de $\mathcal{GU}(\ ,\ )$. De plus, d'après la Proposition 2.1.6, $[[\Phi_g]]_\varepsilon \leqslant [[g]]_\varepsilon^2 [[T]]_\varepsilon \leqslant L^3$, si $[[g]]_\varepsilon \leqslant L$.

· Montrons que pour $g, h \in \mathcal{GU}(X, X \oplus Y)$ avec $[[g]]_\varepsilon, [[h]]_\varepsilon \leqslant L$, il existe une famille $(f_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \subset \mathcal{GU}(X^2, X^2 \oplus Z)$ telle que :

i. les applications $t \mapsto f_t$ et $t \mapsto f_t^{-1}$ sont continues
ii. $\forall 0 \leqslant t \leqslant 1$, $[[f_t]]_\varepsilon \leqslant 2L^6$
iii. $\forall 0 \leqslant s, t \leqslant 1$, $\Delta(f_t, f_s) \leqslant 4\pi L^6 |t - s| + 8L^6\varepsilon$
iv. $\forall (x_1, x_2) \in X^2$, $f_0(x_1, x_2) = (x_1, \Phi_g(x_2))$
v. $\forall (x_1, x_2) \in X^2$, $f_1(x_1, x_2) = (x_1, \Phi_h(x_2))$

Pour cela nous aurons besoin de la remarque suivante :
Remarque 2.3.5. Soit W un espace de Banach.

Définissons pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\psi(\theta) : \begin{array}{ccc} W \oplus W & \to & W \oplus W \\ (w_1, w_2) & \mapsto & (w_1 \cos\theta + w_2 \sin\theta, w_2 \cos\theta - w_1 \sin\theta) \end{array}$$

et notons $J = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc} W \oplus W & \to & W \oplus W \\ (w_1, w_2) & \mapsto & (w_2, -w_1) \end{array}$.

Remarquons qu'alors $\psi(\theta)^{-1} = \psi(-\theta)$.
Montrons que l'application $\theta \mapsto \psi(\theta)$ est 2-Lipschitzienne :

Soient $\theta, \theta' \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $(w_1, w_2) \in B_{W \oplus W}$. On peut supposer que $\|w_1\| \geqslant \|w_2\|$, donc $\|(w_1, w_2)\| = \|w_1\|$. Alors,

$$\begin{aligned} \|(\psi(\theta) - \psi(\theta'))(w_1, w_2)\| &= \max\{\|w_1(\cos\theta - \cos\theta') + w_2(\sin\theta - \sin\theta')\|, \\ &\qquad \|w_2(\cos\theta - \cos\theta') - w_1(\sin\theta - \sin\theta')\|\} \\ &\leqslant \|w_1\|\,|\cos\theta - \cos\theta'| + \|w_2\|\,|\sin\theta - \sin\theta'| \\ &\leqslant \|w_1\|\left(|\cos\theta - \cos\theta'| + |\sin\theta - \sin\theta'|\right) \\ &\leqslant 2\,\|(w_1, w_2)\|\,|\theta - \theta'| \end{aligned}$$

Ainsi $\|\psi(\theta) - \psi(\theta')\| \leqslant 2|\theta - \theta'|$ et $\theta \mapsto \psi(\theta)$ est 2-Lipschitzienne.
De même il est possible de montrer que $\theta \mapsto \psi(\theta)^{-1}$ est 2-Lipschitzienne.

Montrons que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\|\psi(\theta)\| \leqslant 2$:

Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} \|\psi(\theta)\| &= \sup_{\|(w_1,w_2)\| \leqslant 1} \|\psi(\theta)(w_1, w_2)\| \\ &= \sup_{\|(w_1,w_2)\| \leqslant 1} \|w_1 \cos\theta + w_2 \sin\theta, w_2 \cos\theta - w_1 \sin\theta\| \\ &\leqslant \sup_{\|(w_1,w_2)\| \leqslant 1} \|(w_1, w_2)\|\left(|\cos\theta| + |\sin\theta|\right) \leqslant 2 \end{aligned}$$

De même, $\|\psi(\theta)^{-1}\| \leqslant 2$.

Finalement remarquons que l'application $\psi : \begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathcal{L}(W \oplus W) \\ \theta & \mapsto & \psi(\theta) \end{array}$ permet de passer continuement de l'identité de $W \oplus W$ à J.

Revenons à la construction de la famille $(f_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$:
Définissons F_1, F_2 et F_3 de la façon suivante :

$$F_1 : \begin{array}{ccc} X^2 & \to & (X \oplus Y)^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (h(x_1), g(x_2)) = (h_X(x_1), h_Y(x_1), g_X(x_2), g_y(x_2)) \end{array}$$
$$F_2 : \begin{array}{ccc} (X \oplus Y)^2 & \to & (X \oplus Y)^2 \oplus Z \\ (x_1, y_1, x_2, y_2) & \mapsto & (x_1, y_1, x_2, T(y_2)) = (x_1, y_1, x_2, T_Y(y_2), T_Z(y_2)) \end{array}$$
$$F_3 : \begin{array}{ccc} (X \oplus Y)^2 \oplus Z & \to & X^2 \oplus Z \\ (x_1, y_1, x_2, y_2, z) & \mapsto & (h^{-1}(x_1, y_1), g^{-1}(x_2, y_2), z) \end{array}$$

Remarquons que chaque F_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, est dans un $\mathcal{GU}(\ ,\ )$ comme composée d'applications de $\mathcal{GU}(\ ,\ )$. De plus, $\|T\|, \|T^{-1}\|, [[g]]_\varepsilon, [[h]]_\varepsilon \leqslant L$ et la norme utilisée pour les sommes directes est la norme infini, donc $\forall 1 \leqslant i \leqslant 3$, $[[F_i]]_\varepsilon \leqslant L$.

Puis définissons les isométries suivantes :

$$J_1 : \begin{array}{ccc} X^2 & \to & X^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_2, -x_1) \end{array}$$
$$J_2 : \begin{array}{ccc} (X \oplus Y)^2 & \to & (X \oplus Y)^2 \\ (x_1, y_1, x_2, y_2) & \mapsto & (x_1, -y_2, x_2, y_1) \end{array}$$
$$J_3 : \begin{array}{ccc} (X \oplus Y)^2 \oplus Z & \to & (X \oplus Y)^2 \oplus Z \\ (x_1, y_1, x_2, y_2, z) & \mapsto & (x_1, y_2, x_2, -y_1, z) \end{array}$$
$$J_4 := -J_1 \oplus I_Z : \begin{array}{ccc} X^2 \oplus Z & \to & X^2 \oplus Z \\ (x_1, x_2, z) & \mapsto & (x_2, -x_1, z) \end{array}$$

Définissons maintenant $f_0, f_{1/4}, f_{1/2}, f_{3/4}$ et f_1 sur l'espace X^2 à valeurs dans l'espace $X^2 \oplus Z$:

$$f_0 := F_3F_2F_1, \quad f_{1/4} := F_3F_2F_1J_1, \quad f_{1/2} := F_3F_2J_2F_1J_1$$

$$f_{3/4} := F_3J_3F_2J_2F_1J_1, \quad f_1 := J_4F_3J_3F_2J_2F_1J_1$$

Ces applications appartiennent à $\mathcal{GU}(X^2, X^2 \oplus Z)$ comme composées d'applications de $\mathcal{GU}(\ ,\ )$.

Construisons f_t, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, en utilisant la Remarque 2.3.5 sur chacun des intervalles $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ et $[\frac{3}{4}, 1]$:

– Pour $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{4}$, définissons $\Phi : \begin{array}{ccc} [0, \frac{1}{4}] & \to & \mathcal{L}(X^2, X^2) \\ t & \mapsto & \Phi(t) \end{array}$ permettant de passer continûement de l'identité de X^2 à J_1, puis

$$f_t := F_3F_2F_1\Phi(t) = G_0\Phi H_0$$

où $H_0 := I_{X^2}$ et $G_0 := F_3F_2F_1$.

Alors pour tout $s,t \in [0,\frac{1}{4}]$,

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(t)-\Phi(s)\| = \|\psi(2\pi t)-\psi(2\pi s)\| \leqslant 2|2\pi t - 2\pi s| = 4\pi|t-s| \\
&\left\|\Phi(t)^{-1}-\Phi(s)^{-1}\right\| = \left\|\psi(2\pi t)^{-1}-\psi(2\pi s)^{-1}\right\| \leqslant 2|2\pi t - 2\pi s| = 4\pi|t-s| \\
&\|\Phi(t)\| = \|\psi(2\pi t)\| \leqslant 2 \\
&\left\|\Phi(t)^{-1}\right\| = \left\|\psi(2\pi t)^{-1}\right\| \leqslant 2
\end{aligned}$$

De plus, $[[G_0]]_\varepsilon = [[F_3F_2F_1]]_\varepsilon \leqslant L^3$ et $[[H_0]]_\varepsilon = [[I_{X^2}]]_\varepsilon = 1 \leqslant L \leqslant L^3$.

- Pour $\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, définissons $\Phi : \begin{array}{ccc} [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & \to & \mathcal{L}((X\oplus Y)^2,(X\oplus Y)^2) \\ t & \mapsto & \Phi(t) \end{array}$ permettant de passer continûement de l'identité de $(X\oplus Y)^2$ à J_2, puis

$$f_t := F_3F_2\Phi(t)F_1J_1 = G_1\Phi(t)H_1$$

où $H_1 := F_1J_1$ et $G_1 := F_3F_2$.
Alors pour tout $s,t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)-\Phi(s)\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)-\psi\left(2\pi\left(s-\frac{1}{4}\right)\right)\right\| \leqslant 2|2\pi t-2\pi s| \\
&\leqslant 4\pi|t-s| \\
\left\|\Phi(t)^{-1}-\Phi(s)^{-1}\right\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)^{-1}-\psi\left(2\pi\left(s-\frac{1}{4}\right)\right)^{-1}\right\| \\
&\leqslant 2|2\pi t-2\pi s| = 4\pi|t-s| \\
\|\Phi(t)\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)\right\| \leqslant 2 \\
\left\|\Phi(t)^{-1}\right\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)^{-1}\right\| \leqslant 2
\end{aligned}$$

De plus, $[[G_1]]_\varepsilon = [[F_3F_2]]_\varepsilon \leqslant L^2 \leqslant L^3$ et $[[H_1]]_\varepsilon = [[F_1J_1]]_\varepsilon \leqslant L \leqslant L^3$.

- Pour $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}$, définissons $\Phi : \begin{array}{ccc} [\frac{1}{2},\frac{3}{4}] & \to & \mathcal{L}((X\oplus Y)^2\oplus Z,(X\oplus Y)^2\oplus Z) \\ t & \mapsto & \Phi(t) \end{array}$ permettant de passer continûement de l'identité de $(X\oplus Y)^2\oplus Z$ à J_3, puis

$$f_t := F_3\Phi(t)F_2J_2F_1J_1 = G_2\Phi(t)H_2$$

où $H_2 := F_2J_2F_1J_1$ et $G_2 := F_3$.
Alors pour tout $s,t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)-\Phi(s)\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)-\psi\left(2\pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)\right\| \leqslant 2|2\pi t-2\pi s| \\
&\leqslant 4\pi|t-s| \\
\left\|\Phi(t)^{-1}-\Phi(s)^{-1}\right\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}-\psi\left(2\pi\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}\right\| \\
&\leqslant 2|2\pi t-2\pi s| = 4\pi|t-s| \\
\|\Phi(t)\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right\| \leqslant 2 \\
\left\|\Phi(t)^{-1}\right\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}\right\| \leqslant 2
\end{aligned}$$

De plus, $[[G_2]]_\varepsilon = [[F_3]]_\varepsilon \leqslant L \leqslant L^3$ et $[[H_2]]_\varepsilon = [[F_2J_2F_1J_1]]_\varepsilon \leqslant L^2 \leqslant L^3$.

– Pour $\frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1$, définissons $\Phi : \begin{array}{ccc} [\frac{3}{4},1] & \to & \mathcal{L}(X^2 \oplus Z, X^2 \oplus Z) \\ t & \mapsto & \Phi(t) \end{array}$ permettant de passer continûement de l'identité de $X^2 \oplus Z$ à J_4, puis

$$f_t := \Phi(t)F_3J_3F_2J_2F_1J_1 = G_3\Phi(t)H_3$$

où $H_3 := F_3J_3F_2J_2F_1J_1$ et $G_3 := I_{X^2\oplus Z}$. Alors pour tout $s, t \in [\frac{3}{4}, 1]$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t) - \Phi(s)\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t - \frac{3}{4}\right)\right) - \psi\left(2\pi\left(s - \frac{3}{4}\right)\right)\right\| \leqslant 2|2\pi t - 2\pi s| \\
&\leqslant 4\pi|t-s| \\
\left\|\Phi(t)^{-1} - \Phi(s)^{-1}\right\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t - \frac{3}{4}\right)\right)^{-1} - \psi\left(2\pi\left(s - \frac{3}{4}\right)\right)^{-1}\right\| \\
&\leqslant 2|2\pi t - 2\pi s| = 4\pi|t-s| \\
\|\Phi(t)\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t - \frac{3}{4}\right)\right)\right\| \leqslant 2 \\
\left\|\Phi(t)^{-1}\right\| &= \left\|\psi\left(2\pi\left(t - \frac{3}{4}\right)\right)^{-1}\right\| \leqslant 2
\end{aligned}$$

De plus, $[[G_3]]_\varepsilon = [[I_{X^2\oplus Z}]]_\varepsilon = 1 \leqslant L^3$ et $[[H_3]]_\varepsilon = [[F_3J_3F_2J_2F_1J_1]]_\varepsilon \leqslant L^3$.
Ainsi, pour tout $1 \leqslant j \leqslant 4$,

$$\begin{aligned}
\forall s,t \in \left[\frac{j-1}{4}, \frac{j}{4}\right], &\max\left\{\|\Phi(t) - \Phi(s)\|, \left\|\Phi(t)^{-1} - \Phi(s)^{-1}\right\|\right\} \leqslant 4\pi|t-s| \\
&\max\left\{\|\Phi(t)\|, \left\|\Phi(t)^{-1}\right\|\right\} \leqslant 2 \\
\forall t \in \left[\frac{j-1}{4}, \frac{j}{4}\right], &[[f_t]]_\varepsilon = [[G_j\Phi(t)H_j]]_\varepsilon \leqslant L^3 2L^3 = 2L^6
\end{aligned}$$

Les applications H_j et G_j sont dans un $\mathcal{HU}(\ ,\ )$ comme composée d'applications de $\mathcal{HU}(\ ,\ )$, et comme $\Phi(t)$ et $\Phi(s)$ sont linéaires elles appartiennent aussi à $\mathcal{HU}(\ ,\ )$.

Il est donc possible d'appliquer le Lemme 2.1.7 avec $f = H_j$, $g = G_j$, $h_1 = \Phi(t)$ et $h_2 = \Phi(s)$, puis avec $f = G_J^{-1}$, $g = H_J^{-1}$, $h_1 = \Phi(t)^{-1}$ et $h_2 = \Phi(s)^{-1}$:

– Comme $\Phi(t)$ et $\Phi(s)$ sont uniformément continues (reps. $\Phi(t)^{-1}$ et $\Phi(s)^{-1}$), l'application $t \mapsto f_t$ (resp. $t \mapsto f_t^{-1}$) est continue,
– $\|f_t - f_s\| \leqslant \|G_j\|_\varepsilon \|H_j\| (\|\Phi(t) - \Phi(s)\| + 2\varepsilon) \leqslant L^6 (4\pi|t-s| + 2\varepsilon)$
– $\left\|f_t^{-1} - f_s^{-1}\right\| \leqslant \left\|H_j^{-1}\right\|_\varepsilon \left\|G_J^{-1}\right\| (\|\Phi(t)^{-1} - \Phi(s)^{-1}\| + 2\varepsilon) \leqslant L^6(4\pi|t-s| + 2\varepsilon)$

D'où $\Delta(f_t, f_s) = \max\left\{\|f_t - f_s\|, \left\|f_t^{-1} - f_s^{-1}\right\|\right\} \leqslant L^6(4\pi|t-s| + 2\varepsilon)$, pour tout $s, t \in [\frac{j-1}{4}, \frac{j}{4}]$.

Ainsi pour tout $s, t \in [0, 1]$, $\Delta(f_t, f_s) \leqslant L^6(4\pi|t-s| + 8\varepsilon)$.
Il ne reste plus qu'à montrer que pour $(x_1, x_2) \in X^2$, $f_0(x_1, x_2) = (x_1, \Phi_g(x_2))$ et $f_1(x_1, x_2) = (x_1, \Phi_h(x_2))$.

Soient $(x_1, x_2) \in X^2$, alors

$$\begin{aligned}
f_0(x_1, x_2) &= F_3F_2F_1(x_1, x_2) = F_3F_2\left(h_X(x_1), h_y(x_1), g_x(x_2), g_Y(x_2)\right) \\
&= F_3\left(h_X(x_1), h_Y(x_1), g_X(x_2), T_Y(g_Y(x_2)), T_Z(g_Y(x_2))\right) \\
&= \left(h^{-1}(h_X(x_1), h_Y(x_1)), g^{-1}(g_X(x_2), T_Y(g_Y(x_2))), T_Z(g_Y(x_2))\right) \\
&= \left(x_1, g^{-1}(g_X(x_2), T_Y(g_Y(x_2))), T_Z(g_Y(x_2))\right) \\
&= (x_1, \Phi_g(x_2))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= J_4F_3J_3F_2J_2F_1J_1(x_1, x_2) = J_4F_3J_3F_2J_2F_1(x_2, -x_1) \\
&= J_4F_3J_3F_2J_2\left(h_X(x_1), h_Y(x_2), g_X(-x_1), g_Y(-x_1)\right) \\
&= J_4F_3J_3F_2\left(h_X(x_2), -g_Y(-x_1), g_X(-x_1), h_Y(x_2)\right) \\
&= J_4F_3J_3\left(h_X(x_2), -g_Y(-x_1), g_X(-x_1), T_Y(h_Y(x_2)), T_Z(h_Y(x_2))\right) \\
&= J_4F_3\left(h_X(x_2), T_Y(h_Y(x_2)), g_X(-x_1), g_Y(-x_1), T_Z(h_Y(x_2))\right) \\
&= J_4\left(h^{-1}\left(h_X(x_2), T_Y(h_Y(x_2))\right), g^{-1}\left(g_X(-x_1), g_Y(-x_1)\right), T_Z(h_Y(x_2))\right) \\
&= \left(-g^{-1}\left(g_X(-x_1), g_Y(-x_1)\right), h^{-1}\left(h_X(x_2), T_Y(h_Y(x_2))\right), T_Z(h_Y(x_2))\right) \\
&= \left(x_1, h^{-1}\left(h_X(x_2), T_Y(h_Y(x_2))\right), T_Z(h_Y(x_2))\right)
\end{aligned}$$

· Comme X et $X \oplus Y$ sont uniformément proches, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe g_n dans $\mathcal{GU}(X, X \oplus Y)$ tel que $[[g_n]]_{e^{-2n-2}} \leqslant L$. Alors en utilisant l'étape précédente il est possible de construire une famille $(f_t)_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{GU}(X^2, X^2 \oplus Z)$ telle que pour tout n, $f_n = I_X \oplus \Phi_{g_n}$ et pour tout $t \geqslant 0$, $[[f_t]]_{e^{-2n-2}} \leqslant 2L^6$. De plus nous avons vu à la Remarque 2.1.5 que $\varepsilon \mapsto [[f_t]]_\varepsilon$ est décroissante, donc

$$[[f_t]]_{e^{-2t}} \leqslant [[f_t]]_{e^{-2n-2}} \leqslant 2L^6 \leqslant 16L^6$$

Pour finir, soient $s, t \geqslant 0$.

– S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $s, t \in [n, n+1]$, alors

$$\begin{aligned}
\Delta(f_s, f_t) &\leqslant L^6\left(4\pi|t-s| + 8e^{-2n-2}\right) \leqslant L^6\left(4\pi|t-s|\right) + 8L^6(e^{-2t} + e^{-2s}) \\
&\leqslant 16L^6(|t-s| + e^{-2t} + e^{-2s})
\end{aligned}$$

– Supposons maintenant qu'il existe $n < m$ tels que $s \in [n, n+1]$ et $t \in [m, m+1]$. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta(f_s, f_t) &\leqslant \Delta(f_s, f_{n+1}) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \Delta(f_k, f_{k+1}) + \Delta(f_m, f_t) \\
&\leqslant L^6 4\pi|t-s| + 8L^6\left(e^{-2(n+1)} + \sum_{k=n+1}^{m-1} e^{-2(k+1)} + e^{-2(m+1)}\right) \\
&\leqslant 4L^6\pi|t-s| + 16L^6e^{-2s} \leqslant 4L^6\pi|t-s| + 16L^6(e^{-2s} + e^{-2t}) \\
&\leqslant 16L^6(|t-s| + e^{-2t} + e^{-2s})
\end{aligned}$$

De plus, les applications $t \mapsto f_t$ et $t \mapsto f_t^{-1}$ sont continues.

· Appliquons maintenant la Proposition 2.3.2 pour conclure que X^2 et $X^2 \oplus Z$ sont uniformément homéomorphes.

□

Théorème 2.3.6. *Si X et Y sont uniformément proches, X est isomorphe à X^2 et Y est isomorphe à Y^2, alors X est uniformément homéomorphe à Y.*

Preuve : Comme X est uniformément proche de Y, $X \oplus Y$ est uniformément proche de $X \oplus X$, lui-même isomorphe à X, donc $\mathbf{X \oplus Y}$ **est uniformément proche de X**.

De plus, **Y isomorphe à** $\mathbf{Y \oplus Y}$, donc en appliquant le Théorème précédent avec $Z := Y$, X^2 est uniformément homéomorphe à $X^2 \oplus Y$. Et comme X est isomorphe à X^2, X est uniformément homéomorphe à $X \oplus Y$.

De même Y est uniformément homéomorphe à $X \oplus Y$, donc X est uniformément homéomorphe à Y.

□

Théorème 2.3.7.
1. *Soient X et Y uniformément proches, alors pour $1 \leqslant p < +\infty$, $\ell_p(X)$ et $\ell_p(Y)$ sont uniformément homéomorphes. De même, $c_0(X)$ et $c_0(Y)$ sont uniformément homéomorphes.*
2. *Soient X et Y uniforméments homéomorphes, alors pour $1 \leqslant p < +\infty$, $\ell_p(X)$ et $\ell_p(Y)$ sont uniformément homéomorphes. De même, $c_0(X)$ et $c_0(Y)$ sont uniformément homéomorphes.*

Lemme 2.3.8. *Soit X un espace de Banach quelconque. Alors pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, $\ell_p(X \oplus \mathbb{R})$ est isomorphe à $\ell_p(X)$.*

Preuve : Soit Y un espace de Banach tel que $X = \mathbb{R} \oplus Y$. Traitons les isomorphisme comme des égalités :

$$\begin{aligned}
\ell_p(X \oplus \mathbb{R}) &= \ell_p(X) \oplus \ell_p(\mathbb{R}) = (\ell_p(X) \oplus \ell_p(X)) \oplus \ell_p(\mathbb{R}) = \ell_p(X \oplus \mathbb{R}) \oplus \ell_p(X) \\
\ell_p(X) &= \ell_p(X) \oplus \ell_p(X) = \ell_p(X) \oplus \ell_p(Y) \oplus \ell_p(\mathbb{R}) = \ell_p(X) \oplus \ell_p(Y) \oplus \ell_p(\mathbb{R}) \oplus \ell_p(\mathbb{R}) \\
&= \ell_p(X \oplus \mathbb{R}) \oplus \ell_p(X)
\end{aligned}$$

D'où $\ell_p(X) = \ell_p(X \oplus \mathbb{R})$.

□

Démontrons maintenant le Théorème 2.3.7

Preuve :

1. Soit $1 \leqslant p < +\infty$. X et Y sont uniformément proches, donc d'après le Théorème 2.2.3 $\ell_p(X)$ et $\ell_p(Y)$ sont uniformément proches. De plus, $\ell_p(X) \oplus \ell_p(X)$ est isomorphe à $\ell_p(X)$, de même pour Y, donc d'après le Théorème 2.3.6, $\ell_p(X)$ et $\ell_p(Y)$ sont uniformément homéomorphes.

   Le cas de $c_0(X)$ et $c_0(Y)$ se traite de la même façon.
2. X et Y sont uniformément homéomorphes, donc d'après le Théorème 2.3.1, $X \oplus \mathbb{R}$ et $Y \oplus \mathbb{R}$ sont uniformément proches. D'après le 1., $\ell_p(X \oplus \mathbb{R})$ et $\ell_p(Y \oplus \mathbb{R})$ sont uniformément homéomorphes.

   Or d'après le Lemme précédent $\ell_p(X \oplus \mathbb{R})$ est isomorphe à $\ell_p(X)$ et $\ell_p(Y \oplus \mathbb{R})$ est isomorphe à $\ell_p(Y)$. Donc $\ell_p(X)$ et $\ell_p(Y)$ sont uniformément homéomorphes.

   Le cas de $c_0(X)$ et $c_0(Y)$ se traite de la même façon.

□

Théorème 2.3.9. *Soient X et Y deux espaces de Banach uniformément proches tels que X est isomorphe à $\ell_p(X)$, pour $1 \leqslant p < +\infty$, ou à $c_0(X)$. Alors Y^2 est uniformément homéomorphe à X.*

Preuve : Traitons le cas où X est isomorphe à $\ell_p(X)$, la cas $c_0(X)$ se traite de la même façon.

Remarquons tout d'abord que comme X est isomorphe à $\ell_p(X)$, X est isomorphe à X^2. En effet, $\ell_p(X)$ est isomorphe à $\ell_p(X) \oplus \ell_p(X)$, donc X est isomorphe à $\ell_p(X) \oplus \ell_p(X)$, lui même isomorphe à $X \oplus X$, d'où X isomorphe à X^2.

Ainsi, si X et Y sont uniformément proches, alors d'une part X^2 et Y sont uniformément proche et d'autre part X^2 et $Y \oplus X$ sont uniformément proches. D'après le Lemme 2.2.2, Y et $Y \oplus X$ sont uniformément proches.

Appliquons le Théorème 2.3.3 : nous obtenons que Y^2 et $Y^2 \oplus X$ sont uniformément homéomorphes.

Montrons maintenant que X et $Y^2 \oplus X$ sont uniformément homéomorphes :

Comme X et Y sont uniformément proches, d''après le Théorème 2.3.7.1., $\ell_p(X)$ et $\ell_p(Y)$ sont uniformément homéomorphes. Donc X et $\ell_p(Y)$ sont uniformément homéomorphes.

De plus rappelons que $\ell_p(Y)$ est isomorphe à $Y^2 \oplus \ell_p(Y)$. Donc X est uniformément homéomorphe à $Y^2 \oplus \ell_p(Y)$. Finalement, X est uniformément homéomorphe à $Y^2 \oplus X$.

D'où X est uniformément homéomorphe à Y^2.

$\square$

Chapitre 3

Applications : Homéomorphisme uniforme et isomorphisme

Le premier exemple que nous donnerons d'application des théorèmes précédents est le résultat suivant dû à M. Ribe en 1984 dans [7] :

Théorème 3.0.10. *Soit $q > 1$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 1$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 1. Alors les espaces $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ et $L_1 \oplus \left(\sum\limits_{n\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ sont uniformément homéomorphes.*

Dans son article [4], N.J. Kalton donne un généralisation du principe utilisé par M. Ribe dans [7]. C'est pourquoi nous pouvons démontrer ce Théorème comme conséquence des résultats du Chapitre 2.

Lemme 3.0.11. *Pour $1 \leqslant p, q < +\infty$, définissons l'application*

$$m_{p,q} : \begin{array}{ccc} L_p & \to & L_q \\ f & \mapsto & \|f\|_p^{1-p/q} \operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q} \end{array}$$

Alors $m_{p,q}$ appartient à $\mathcal{GU}(L_p, L_q)$.

Preuve : Soient $1 \leqslant p, q < +\infty$.

1. Remarquons tout d'abord que $m_{p,q}$ est bien définie et montrons qu'elle est à valeurs dans L_q :
   Soit $f \in L_p$,
   $$\begin{aligned}\int_{[0,1]} |m_{p,q}(f)|^q \mathrm{d}\lambda &= \int_{[0,1]} |\, \|f\|_p^{1-p/q} \operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q}|^q \mathrm{d}\lambda = \|f\|_p^{q-p} \int_{[0,1]} |f|^p \mathrm{d}\lambda \\ &= \|f\|_p^{q-p} \|f\|_p^p = \|f\|_p^q\end{aligned}$$
   Donc $m_{p,q}(f) \in L_q$ et de plus $\|m_{p,q}(f)\|_q = \|f\|_p$. En particulier, $\|m_{p,q}\| \leqslant 1$.
2. Montrons que $m_{p,q}$ est positive homogène :
   Soit $\alpha > 0$ et $f \in L_p$,
   $$\begin{aligned}m_{p,q}(\alpha f) &= \|\alpha f\|_p^{1-p/q} \operatorname{sgn}(\alpha f)|\alpha f|^{p/q} = \alpha^{1-p/q} \|f\|_p^{1-p/q} \operatorname{sgn}(f)\alpha^{p/q}|f|^{p/q} \\ &= \alpha \|f\|_p^{1-p/q} \operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q} = \alpha m_{p,q}(f)\end{aligned}$$
   Donc $m_{p,q}$ est homogène positive.

3. Montrons que $m_{p,q}$ est bijective de bijection réciproque $m_{q,p}$:
Soit $f \in L_p$,

$$\begin{aligned} m_{q,p}\left(m_{p,q}(f)\right) &= m_{q,p}\left(\|f\|_p^{1-p/q}\operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q}\right) = \|f\|_p^{1-p/q}\, m_{q,p}\left(\operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q}\right) \\ &= \|f\|_p^{1-p/q}\left\|\operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q}\right\|_q^{1-q/p}\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q})|\operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q}|^{q/p} \\ &= \|f\|_p^{1-p/q}\,\|f\|_p^{p/q(1-q/p)}\operatorname{sgn}(f)|f| = f \end{aligned}$$

Donc $m_{q,p} \circ m_{p,q} = Id_{L_p}$. Les mêmes calculs montrent que $m_{p,q} \circ m_{q,p} = Id_{L_q}$, ainsi $m_{p,q}$ est bijective de bijection réciproque $m_{q,p}$.

4. Il ne reste plus qu'à montrer que $m_{p,q}$ restreinte à la boule unité de L_p est uniformément continue, sa bijection réciproque étant également une $m_{q,p}$.

Supposons $p > q$. Soit $\Phi : B_{L_p} \to B_{L_q}$ définie par $\forall f \in B_{L_p}$, $\Phi(f) = \operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q}$.

(a) Montrons que Φ est partout Gâteau-différentriable et que la norme de la dérivée de Φ au point f est bornée par p/q, nous en déduirons donc que Φ est p/q-Lipschitzienne.

L'application $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{sgn}(x)|x|^{p/q} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \dfrac{p}{q}\operatorname{sgn}(x)|x|^{p/q-1}$.

Montrons que pour tout $f \in B_{L_p}$ et $h \in L_p$, le quotient $\dfrac{\Phi(f+th)-\Phi(f)}{t}$ tend simplement vers $\dfrac{p}{q}\, h|f|^{p/q-1}$ lorsque t tend vers 0.
Soit $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(f+th)(x)-\Phi(f)(x)}{t} &= \frac{\left(\operatorname{sgn}(f+th)|f+th|^{p/q}\right)(x) - \left(\operatorname{sgn}(f)|f|^{p/q}\right)(x)}{t} \\ &\overset{i}{=} \operatorname{sgn}(f(x))\frac{|f(x)+th(x)|^{p/q}-|f(x)|^{p/q}}{t} \\ &= h(x)\operatorname{sgn}(f(x))\frac{|f(x)+th(x)|^{p/q}-|f(x)|^{p/q}}{th(x)} \\ &\xrightarrow{t\to 0} h(x)\operatorname{sgn}(f(x))\frac{p}{q}\operatorname{sgn}(f(x))|f(x)|^{p/q-1} \\ &= \frac{p}{q}\, h(x)|f(x)|^{p/q-1} \end{aligned}$$

i. car t tend vers 0

Soit alors , pour $f \in B_{L_p}$, $D_\Phi(f) : \begin{array}{ccc} L_p & \to & L_q \\ h & \mapsto & \dfrac{p}{q}\, h|f|^{p/q-1} \end{array}$.

Vérifions tout d'abord que $D_\Phi(f)$ est à valeurs dans L_q :

Soit $h \in L_p$,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} |D_\Phi(f)(h)|^q \mathrm{d}\lambda &= \int_{[0,1]} |\frac{p}{q}\, h|f|^{p/q-1}|^q \mathrm{d}\lambda = \left(\frac{p}{q}\right)^q \int_{[0,1]} |h|^q |f|^{p-q} \mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \left(\frac{p}{q}\right)^q \left(\int_{[0,1]} (|h|^q)^{p/q} \mathrm{d}\lambda\right)^{q/p} \left(\int_{[0,1]} (|f|^{p-q})^{p/(p-q)} \mathrm{d}\lambda\right)^{(p-q)/p} \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^q \left(\int_{[0,1]} |h|^p \mathrm{d}\lambda\right)^{q/p} \left(\int_{[0,1]} |f|^p \mathrm{d}\lambda\right)^{(p-q)/p} < +\infty\end{aligned}$$

car f et h sont dans L_p.

Donc $D_\Phi(f)(h) \in L_q$ et de plus $\|D_\Phi(f)(h)\|_q \leqslant \frac{p}{q} \|h\|_p \|f\|_p^{(p-q)/q} = \frac{p}{q} \|h\|_p$.

Ainsi, $D_\Phi(f)$ est continue et $\|D_\Phi(f)\| \leqslant \frac{p}{q}$.

Soit $h \in L_p$,

$$\begin{aligned}&\left\| D_\Phi(f)(h) - \frac{\Phi(f+th) - \Phi(f)}{t} \right\|_p^p \\ &\qquad = \left\| \frac{p}{q} h|f|^{p/q-1} - \frac{1}{t}\left(\mathrm{sgn}(f+th)|f+th|^{p/q} - \mathrm{sgn}(f)|f|^{p/q}\right) \right\|_p^p \\ &\qquad = \left\| \frac{p}{q} h|f|^{p/q-1} - \frac{1}{t}\mathrm{sgn}(f)\left(|f+th|^{p/q} - |f|^{p/q}\right) \right\|_p^p\end{aligned}$$

De plus, pour tout t, $\frac{\Phi(f+th) - \Phi(f)}{t}$ appartient à L_q et ce quotient converge presque partout vers $\frac{p}{q}\, h|f|^{p/q-1}$ lorsque t tend vers 0. Donc pour t assez petit,

$$\left|\frac{\Phi(f+th) - \Phi(f)}{t} - \frac{p}{q}\, h|f|^{p/q-1}\right| \leqslant M$$

D'où,

$$\lim_{t\to 0} \left\| D_\Phi(f)(h) - \frac{\Phi(f+th) - \Phi(f)}{t} \right\|^p = 0$$

Finalement, $D_\Phi(f)$ est la Gâteau-différentielle de Φ au point f et de plus $\|D_\Phi(f)\| \leqslant \frac{p}{q}$. C'est-à-dire que Φ est $\frac{p}{q}$ -Lipschitzienne, donc en particulier uniformément continue.

(b) Montrons que Φ^{-1} est Hölderienne d'exposant q/p.
Pour cela nous allons montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_q^q \geqslant c^q \|f-g\|_p^p$.
Commençons par démontrer le Lemme suivant :
Lemme 3.0.12. *Pour tout* $1 \leqslant q < p < +\infty$, *il existe* $c > 0$ *telle que pour tout* $a \geqslant b \geqslant 0$, *pour tout* $\theta = \pm 1$, $|a^{p/q} - \theta b^{p/q}| \geqslant c|a - \theta b|^{p/q}$.

Preuve : Le résultat est clair si $b=0$, soit donc $b\neq 0$.

Montrons le résultat pour $b=1$. Alors si $b\neq 1$ et $a\geqslant b$, $\dfrac{b}{b}=1$ et $\dfrac{a}{b}\geqslant 1$, donc il existe $c>0$ telle que $|\left(\dfrac{a}{b}\right)^{p/q}-\theta|\geqslant c|\dfrac{a}{b}-\theta|^{p/q}$, i.e. $|a^{p/q}-\theta b^{p/q}|\geqslant c|a-\theta b|^{p/q}$.

· Soit $\theta=-1$. Posons pour tout $a\geqslant 1$, $\omega_1(a)=\dfrac{a^{p/q}+1}{(a+1)^{p/q}}$. Alors pour tout $a\geqslant 1$, $\omega_1(a)>0$, de plus ω_1 est continue et tend vers 1 lorsque a tend vers $+\infty$. Donc il existe $c_1>0$ tel que pour tout $a\geqslant 1$, $\omega_1(a)\geqslant c_1$. Autrement dit, pour tout $a\geqslant 1$, $a^{p/q}-\theta\geqslant c_1(a-\theta)^{p/q}$

· Soit $\theta=1$. Définissons pour tout $a>1$, $\omega_2(a)=\dfrac{a^{p/q}-1}{(a-1)^{p/q}}$. Alors au voisinage de 1, $a=1+\varepsilon$, et $a^{p/q}=(1+\varepsilon)^{p/q}=1+\dfrac{p}{q}\varepsilon+o(\varepsilon)$. Donc au voisinage de 1, $\omega_2(a)\sim\dfrac{p}{q}\varepsilon^{1-p/q}$ et comme $p>q$, $\dfrac{p}{q}\varepsilon^{1-p/q}$ tend vers $+\infty$ lorsque ε tend vers 0. D'où $\omega_2(a)$ tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 1, et comme ω_2 est décroissante et $\lim\limits_{a\to+\infty}\omega_2(a)=1$, on en déduit qu'il existe $c_2>0$ tel que pour $a\geqslant 1$, $\omega_2(a)\geqslant c_2$. C'est-à-dire $a^{p/q}-\theta\geqslant c_2(a-\theta)^{p/q}$.

Le Lemme est donc démontré en choisissant $c=\min\{1,c_1,c_2\}$.

□

Soient f et g dans B_{L_p}, alors

$$\begin{aligned}
|\Phi(f)-\Phi(g)| &= ||f|^{p/q}\mathrm{sgn}(f)-|g|^{p/q}\mathrm{sgn}(g)| \\
&= \begin{cases} ||f|^{p/q}-|g|^{p/q}\mathrm{sgn}(f)\mathrm{sgn}(g)| & ,\text{si } |g|\geqslant|f| \\ |\mathrm{sgn}(f)\mathrm{sgn}(g)|f|^{p/q}-|g|^{p/q}| & ,\text{si } |f|\geqslant|g| \end{cases} \\
&\geqslant \begin{cases} c||f|-|g|\mathrm{sgn}(f)\mathrm{sgn}(g)|^{p/q} & \text{si } |g|\geqslant|f| \\ c||f|\mathrm{sgn}(f)\mathrm{sgn}(g)-|g||^{p/q} & \text{si } |f|\geqslant|g| \end{cases} \\
&= c||f|\mathrm{sgn}(f)-|g|\mathrm{sgn}(g)|^{p/q}=c|f-g|^{p/q}
\end{aligned}$$

Ainsi, $|\Phi(f)-\Phi(g)|^q\geqslant c^q|f-g|^p$, d'où $\|\Phi(f)-\Phi(g)\|_q^q\geqslant c^q\,\|f-g\|_p^p$.

Donc pour tout $f,g\in B_{L_p}$, $\|\Phi(f)-\Phi(g)\|_q^{q/p}\geqslant c^{q/p}\,\|f-g\|_p$.

Or nous savons que Φ est bijective, donc pour tout $u,v\in L_q$,

$$\left\|\Phi^{-1}(u)-\Phi^{-1}(v)\right\|_p\leqslant\frac{1}{c^{q/p}}\,\|u-v\|_q^{q/p}$$

Donc Φ^{-1} est Hölderienne d'exposant q/p. En particulier elle est uniformément continue.

Nous avons donc montré que Φ définie un homéomorphisme uniforme entre B_{L_p} et B_{L_q}.

Montrons qu'alors $m_{p,q}$ définie un homéomorphisme uniforme entre B_{L_p} et B_{L_q} :

Remarquons que pour $f\in L_p$, $m_{p,q}(f)=\|f\|_p\,\Phi\left(\dfrac{f}{\|f\|_p}\right)$:

$$\|f\|\,\Phi\left(\frac{f}{\|f\|}\right)=\|f\|\,\mathrm{sgn}\left(\frac{f}{\|f\|}\right)\frac{|f|^{p/q}}{\|f\|^{p/q}}=\|f\|^{1-p/q}\,\mathrm{sgn}(f)|f|^{p/q}$$

Soient f et g dans B_{L_p}, alors

$$\begin{aligned}
\|m_{p,q}(f) - m_{p,q}(g)\| &= \left\| \|f\|_p \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_p}\right) - \|g\|_p \Phi\left(\frac{g}{\|g\|_p}\right) \right\| \\
&\leqslant \left\| \|f\|_p \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_p}\right) - \|f\|_p \Phi\left(\frac{g}{\|g\|_p}\right) \right\| \\
&\qquad + \left\| \|f\|_p \Phi\left(\frac{g}{\|g\|_p}\right) - \|g\|_p \Phi\left(\frac{g}{\|g\|_p}\right) \right\| \\
&\leqslant \|f\|_p \left\| \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_p}\right) - \Phi\left(\frac{g}{\|g\|_p}\right) \right\| + \|f-g\|_p \left\| \Phi\left(\frac{g}{\|g\|_p}\right) \right\|
\end{aligned}$$

Or, $\left\| \Phi\left(\frac{g}{\|g\|_p}\right) \right\| = 1$, de plus Φ est p/q-Lipschitzienne, donc

$$\|m_{p,q}(f) - m_{p,q}(g)\| \leqslant \frac{p}{q} \|f\|_p \left\| \frac{f}{\|f\|_p} - \frac{g}{\|g\|_p} \right\|_p + \|f-g\|_p$$

Mais en utilisant le Lemme 2.1.2, nous en déduisons

$$\|m_{p,q}(f) - m_{p,q}(g)\| \leqslant \left(2\frac{p}{q} + 1\right) \|f-g\|_p$$

Ainsi $m_{p,q}$ est Lipschitzienne sur la boule unité de L_p, donc uniformément continue sur la boule unité de L_p.

Soit maintenant $u, v \in B_{L_q}$, de même que précédemment,

$$\|m_{q,p}(u) - m_{q,p}(v)\| \leqslant \|u\|_q \left\| \Phi^{-1}\left(\frac{u}{\|u\|_q}\right) - \Phi^{-1}\left(\frac{v}{\|v\|_q}\right) \right\| + \|u-v\|_q$$

Comme Φ^{-1} est Hölderienne,

$$\begin{aligned}
\|m_{q,p}(u) - m_{q,p}(v)\| &\leqslant \frac{\|u\|_q}{c^{q/p}} \left\| \frac{u}{\|u\|_q} - \frac{v}{\|v\|_q} \right\|_q^{q/p} + \|u-v\|_q \\
&\leqslant \frac{\|u\|_q}{c^{q/p}} \left(\frac{2}{\|u\|_q} \|u-v\|_q \right)^{q/p} + \|u-v\|_q \\
&\leqslant \frac{2^{q/p} \|u\|_q^{1-q/p}}{c^{q/p}} \|u-v\|_q^{q/p} + \|u-v\|_q
\end{aligned}$$

Or $p > q$ et $\|u\|_q \leqslant 1$, donc $\|u\|_q^{1-q/p} \leqslant 1$, d'où

$$\|m_{q,p}(u) - m_{q,p}(v)\| \leqslant \left(\frac{2}{c}\right)^{q/p} \|u-v\|_q^{q/p} + \|u-v\|_q$$

Ainsi $m_{q,p}$ est uniformément continue et donc $m_{p,q}$ définie un homéomorphisme uniforme entre les boules unités de L_p et de L_q.

Finalement, nous avons montré que pour tout $1 \leqslant p,q < +\infty$, $m_{p,q} : L_p \to L_q$ est positive homogène, uniformément continue sur la boule unité de L_p, bijective de bijection réciproque uniformément continue sur la boule unité de L_q, donc $m_{p,q} \in \mathcal{GU}(L_p, L_q)$.

$\square$

Nous avons maintenant les outils nécessaire pour démontrer le Théorème.

Preuve :

1. Tout d'abord montrons que $\left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q \oplus \left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ est isomorphe à $\left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$.

   Notons les isomorphismes comme des égalités.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q \oplus_q \left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q &= L_{p_1} \oplus_q \cdots \oplus_q L_{p_n} \oplus_q \cdots \oplus_q L_{p_1} \oplus_q \cdots \oplus_q L_{p_n} \oplus_q \dots \\
&= (L_{p_1} \oplus_q L_{p_1}) \oplus_q \cdots \oplus_q (L_{p_n} \oplus_q L_{p_n}) \oplus_q \dots \\
&= L_{p_1} \oplus_q L_{p_2} \oplus_q \cdots \oplus_q L_{p_n} \oplus_q \dots \\
&= \left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q
\end{aligned}$$

2. De la même façon il est possible de montrer que $\left(L_1 \oplus \left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q\right) \oplus \left(L_1 \left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q\right)$ est isomorphe à $L_1 \oplus \left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$.

3. De plus dans le Lemme précédent nous avons montrer que pour tout $1 \leqslant p,q < +\infty$, il existe une application $m_{p,q} \in \mathcal{GU}(L_p, L_q)$ de norme inférieure ou égale à 1. Donc pour tout $1 \leqslant p,q < +\infty$, les espaces L_p et L_q sont uniformément 1-proches.

   Ainsi, L_1 est uniformément 1-proche de L_{p_1} et $\forall n \geqslant 1$, L_{p_n} est uniformément 1-proche de $L_{p_{n+1}}$.

   Donc d'après la Proposition 2.2.3, les espaces $\left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ et $L_1 \oplus \left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ sont uniformément proches.

Il suffit maintenant d'appliquer le Théorème 2.3.6 pour obtenir que les espaces $\left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ et $L_1 \oplus \left(\sum_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ sont uniformément homéomorphes.

$\square$

Corollaire 3.0.13. *La réflexivité, la propriété de Radon-Nikodym et le fait qu'un espace est d'Asplund ne sont pas stables par homéomorphisme uniforme.*

Pour démontrer ce Théorème nous avons besoin du résultat suivant :

Théorème 3.0.14. *Soient $1 < q < +\infty$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'espaces de Banach réflexifs. Alors l'espace $\left(\sum_{n\geqslant 1} X_n\right)_q$ est réflexif.*

Preuve : Soit q' l'exposant conjugué de q. Définissons

$$J : \begin{array}{ccc} \left(\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n^*\right)_{q'}\right) & \to & \left(\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q\right)^* \\ x^* = (x_n^*)_{n\geqslant 1} & \mapsto & J((x_n^*)_{n\geqslant 1}) : \begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum\limits_{n\geqslant 1} x_n^*(x_n) \end{array} \end{array}$$

Commençons par montrer que J est une isométrie :
Soit $x^* = (x_n^*)_{n\geqslant 1} \in \left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n^*\right)_{q'}$ et $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q$. Alors

$$\begin{aligned} |J(x^*)(x)| &= |\sum_{n\geqslant 1} x_n^*(x_n)| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |x_n^*(x_n)| \\ &\leqslant \left(\sum_{n\geqslant 1} \|x_n^*\|^{q'}\right)^{1/q'} \left(\sum_{n\geqslant 1} \|x_n\|^{q'}\right)^{1/q'} = \|x^*\|_{q'} \|x\|_q \end{aligned}$$

Donc $\|J(x^*)\| \leqslant \|x^*\|_{q'}$.
Comme $(\|x_n^*\|)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell_{q'}$ il existe $(a_n)_{n\geqslant 1} \in B_{\ell_q}$ telle que

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \|x_n^*\| = \left(\sum_{n\geqslant 1} \|x_n^*\|^{q'}\right)^{1/q'}$$

D'après le Théorème de Hahn-Banach, pour tout $n \geqslant 1$ il existe $x_n \in X_n^{**}$, tel que $\|x_n\| = a_n$ et $x_n^*(x_n) = a_n \|x_n^*\|$. De plus, pour tout n, X_n est réflexif donc on peut supposer $x_n \in X_n$. Soit $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$. Alors $x \in \left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q$ et $\|x\|_q = \|(a_n)_{n\geqslant 1}\|_q \leqslant 1$. De plus,

$$|J(x^*)(x)| = |\sum_{n\geqslant 1} x_n^*(x_n)| = \sum_{n\geqslant 1} a_n \|x_n^*\| = \left(\sum_{n\geqslant 1} \|x_n^*\|^{q'}\right)^{1/q'} = \|x^*\|_{q'}$$

Donc $\|J(x^*)\| \geqslant \|x^*\|_{q'}$, d'où finalement $\|J(x^*)\| = \|x^*\|_{q'}$
Ainsi J est une isométrie. Montrons maintenant que J est surjective :
Soit $T : \left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q \to \mathbb{R}$ linéaire continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n^* \in X_n^*$ tel que pour tout $x_n \in X_n$, $T((0,\dots,0,x_n,0,\dots)) = x_n^*(x_n)$.
Montrons que $x^* = (x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est dans $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n^*\right)_{q'}$:
D'après le Théorème de Hahn-Banach, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in S_{X_n}$ tel que $x_n^*(x_n) = \|x_n^*\|$.
Définissons une suite $\left((x_n^k)_{n\geqslant 1}\right)^{k\in\mathbb{N}}$ de $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_n^k = \begin{cases} \|x_n^*\|^{q'-1} x_n & , n \leqslant k \\ 0 & , n > k \end{cases}$$

Alors pour tout k, $(x_n^k)_{n\geqslant 1}$ est à support fini, donc appartient à $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q$. De plus, pour tout k,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \|x_n^*\|^{q'} &= \sum_{n=1}^{k} \|x_n^*\|^{q'-1} x_n^*(x_n) = \sum_{n=1}^{k} x_n^* \left(\|x_n^*\|^{q'-1} x_n\right) \\
&= T\left(\|x_1^*\|^{q'-1} x_1, \ldots, \|x_k^*\|^{q'-1} x_k, 0, \ldots\right) \\
&\leqslant \|T\| \left(\sum_{n=1}^{k} \left(\|x_n^*\|^{q'-1} \|x_n\|\right)^q\right)^{1/q} = \|T\| \left(\sum_{n=1}^{k} \|x_n^*\|^{qq'-q}\right)^{1/q} \\
&= \|T\| \left(\sum_{n=1}^{k} \|x_n^*\|^{q'}\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

D'où, $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} \|x_n^*\|^q\right)^{q'-1/q} \leqslant \|T\|$.

Ceci étant vrai pour tout k, nous en déduisons $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|x_n^*\|^q \leqslant \|T\|^{1/q-q'}$.

Ainsi $x^* \in \left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n^*\right)_{q'}$, de plus il est clair que $T = J(x)$, donc J est surjective.

Nous admettrons que J est l'isométrie surjective canonique entre $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n^*\right)_{q'}$ et $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q^*$, donc $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n^*\right)_{q'}$ est le dual de $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q$. De même le bidual de $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q$ est le dual de $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n^*\right)_{q'}$, donc $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n^{**}\right)_q$. Or X_n est réflexif, donc on peut identifier X_n et X_n^{**}, donc le bidual de $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q$ est $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n\right)_q$, c'est-à-dire que cet espace est réflexif.

□

Le Corollaire 3.0.13 se déduit alors aisément :

Preuve : L'espace $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ est réflexif, donc en particulier il a la propriété de Radon-Nikodym et il est d'Asplund. Cependant $L_1 \oplus \left(\sum\limits_{n\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ contient L_1, donc n'a pas ces propriétés.

□

En particulier deux espaces uniformément homéomorphes ne sont pas nécessairement linéairement isomorphes, même s'ils sont séparables.

Le Théorème suivant se montre exactement de la même façon que le Théorème 3.0.10 :

Théorème 3.0.15. *Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > p$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers p. Soit $1 \leqslant q < +\infty$ différent de p. Alors les espaces $\left(\sum\limits_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ et $L_p \oplus \left(\sum\limits_{p\geqslant 1} L_{p_n}\right)_q$ sont uniformément homéomorphes.*

Remarque 3.0.16. Il est possible de montrer que pour tout $1 \leqslant p, q < +\infty$, ℓ_p et ℓ_q sont uniformément 1-proches en considérant les applications suivantes :

$$m_{p,q} : \begin{array}{ccc} \ell_p & \to & \ell_q \\ x = (x_n)_{n\geqslant 1} & \mapsto & \left(\|x\|_p^{1-p/q}\operatorname{sgn}(x_n)|x_n|^{p/q}\right)_{n\geqslant 1} \end{array}$$

et donc en adaptant les preuves précédentes, nous obtenons le Théorème suivant :

Théorème 3.0.17. *Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > p$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers p. Soit $1 \leqslant q < +\infty$ différent de p. Alors les espaces $\left(\sum_{p\geqslant 1} \ell_{p_n}\right)_q$ et $\ell_p \oplus \left(\sum_{p\geqslant 1} \ell_{p_n}\right)_q$ sont uniformément homéomorphes.*

Les résultats suivants sur le liens entre homéomorphisme uniforme et isomorphismes sont connus :

Théorème 3.0.18.
1. *Pour $1 < p < +\infty$, si X est uniformément homéomorphe à ℓ_p, alors X est isomorphe à ℓ_p.*
2. *Pour $1 < p < q < +\infty$, $2 \notin \{p, q\}$, si X est uniformément homéomorphe à $\ell_p \oplus \ell_q$, alors X est linéairement homéomorphe à $\ell_p \oplus \ell_q$.*

Cependant, la question suivante est une question ouverte :

Question : Si un Banach X est uniformément homéomorphe à Y avec $Y = L_p$, $\ell_p \oplus \ell_2$ ou $\ell_p(\ell_2)$, X est-il isomorphe à Y ?

Dans le cas de ℓ_1 et L_1, nous ne savons même pas si un espace Lipschitz-équivalent à l'un de ce deux espaces est isomorphe à cet espace.

N.J. Kalton démontre le théorème suivant dans [4] :

Théorème 3.0.19. *Soit $1 < p < +\infty$ tel que $p \neq 2$. Alors il existe X et Y deux sous-espaces de ℓ_p tels que X et Y sont uniformément homéomorphes mais pas linéairement isomorphes.*

De même pour c_0.

La démonstration de ce résultat utilise le Théorème 2.3.7 et également d'autres outils qui ne sont pas développés dans ce mémoire mais qui le sont dans l'article.

Conclusion

En conclusion nous avons vu dans le premier Chapitre un exemple d'espaces Lipschitz-équivalents qui ne sont pas linéairement isomorphes. Donc dans le cas général, la Lipschitz-équivalence n'implique pas l'isomorphie. Cependant les espaces considérés sont non séparables.

Dans le cas des espaces séparables c_0, ℓ_p et L_p, $1 < p < +\infty$, nous savons que la Lipschitz-équivalence implique l'isomorphie, mais nous ne savons pas ce qu'il en est des espaces ℓ_1 ou L_1. Pourtant, si un dual est Lipschitz-équivalent à ℓ_1, alors il lui est isomorphe.

Finalement la question suivante est ouverte : Deux Banach séparables Lipschitz-équivalents sont-ils nécessairement linéairement isomorphes ?

Une application Lipschitzienne étant uniformément continue, si deux espaces sont Lipschitz-équivalents, alors ils sont uniformément homéomorphes. Ainsi l'exemple de I. Aharoni et J. Lindenstrauss donne deux espaces non séparables qui sont uniformément homéomorphes mais pas isomorphes. Mais qu'en est-il des espaces séparables ?

L'exemple de M. Ribe étudié au Chapitre 3 met en évidence deux espaces séparables uniformément homéomorphes mais pas linéairement isomorphes. En particulier il permet de montrer que la réflexivité, la propriété de Radon-Nikodym et le fait qu'un espace est d'Asplund ne sont pas stables pas homéomorphisme uniforme. Cependant la super réflexivité l'est.

Tout comme dans le cas de la Lipschitz-équivalence, nous savons que dans le cas de ℓ_p, $1 < p < +\infty$ l'uniforme homéomorphie implique l'isomorphie. Pour finir, la question reste ouverte pour les espaces $\ell_1, L_p, 1 \leqslant p < +\infty, \ell_p \oplus \ell_2$ ou encore $\ell_p(\ell_2)$.

Bibliographie

[1] I. Aharoni et J. Lindenstrauss, *Uniform equivalence between Banach spaces*, Bulletin Of The American Mathematical Society, 84 (1978), 281-283

[2] Y. Benyamini et J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis, Volume 1*, A. M. S. Colloquium Publications 48, 2000

[3] G. Godefroy et N.J. Kalton, *Lipschitz-Free Banach Spaces*, Studia Math. 159 (2003), 121-141

[4] N.J. Kalton, *Examples of Uniformly Homeomorphic Banach Spaces*, à paraître dans Israel J. Math.

[5] N.J. Kalton, *The Uniform Structure Of Banach Spaces*, à paraître dans Math. Ann.

[6] V. Komornik, *Précis d'analyse réelle, Analyse fonctionnelle, Intégrale de Lebesgue, Espaces fonctionnels*, Ellipses, 2002

[7] M. Ribe, *Existence Of Separable Uniformly Homeomorphic Nonisomorphic Banach Spaces*, Israel J. Math. 48 (1984), 139-147