École Doctorale Carnot-Pasteur

Thèse de Doctorat

présentée par

Aude Dalet

pour obtenir le grade de
Docteur de Mathématiques de l'Université de
Franche-Comté – Besançon

Étude des espaces Lipschitz-libres

Thèse soutenue le 16 Juin 2015, devant le jury composé de :

Benoît R. KLOECKNER	Examinateur
Gilles GODEFROY	Examinateur
Petr HÁJEK	Rapporteur
Gilles LANCIEN	Directeur de thèse
Etienne MATHERON	Rapporteur
Antonín PROCHÁZKA	Examinateur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Gilles Lancien pour m'avoir initiée à la recherche et permis de réaliser cette thèse. Durant ces trois années il a toujours été présent, quelles qu'aient été les raisons de mes visites et a toujours su trouver les mots pour me remotiver. Il fut pour moi une grande source d'inspiration.

Je voudrais ensuite remercier Gilles Godefroy, Petr Hàjek, Benoît Kloeckner, Étienne Matheron et Antonìn Prochàzka pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Ça a été pour moi un grand honneur et un plaisir de partager mon travail avec eux. Plus particulièrement, merci à Étienne et Petr pour leur travail de rapporteur.

Une partie de cette thèse a été réalisée en collaboration avec Pedro Kaufmann et Tony Prochàzka. Je les remercie d'avoir partagé ce travail avec moi. C'est toujours une expérience très enrichissante de réfléchir avec eux et également d'agréables moments de partage.

Merci au Laboratoire de Mathématiques de Besançon de m'avoir accueillie et aux différents membres qui ont toujours été présents en cas de problème ou de question. Plus particulièrement, merci à Christians, Florence, Romain, Richard, Catherines et Pascaline. Je tiens également à remercier l'équipe d'analyse fonctionnelle au sein de laquelle j'ai évolué et l'équipe de mathématiques de l'ENSMM, où j'ai effectué une grande partie de mes enseignements.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont permis de m'épanouir en tant que jeune chercheuse. Tout d'abord les profs que j'ai rencontrés au cours de ma scolarité et qui m'ont poussée à donner toujours plus. Plus particulièrement, merci à M. Boussard, M. Bordes et Boris Andreianov.

Merci de nouveau à Gilles Godefroy, qui a été présent tout au long de ma thèse et avec qui c'est un plaisir d'échanger. Il a toujours une tonne de bonnes idées et de directions à explorer.

J'ai eu la change durant ma thèse d'effectuer un séjour de recherche à Prague : merci à Petr Hàjek de m'avoir accueillie et d'avoir partagé ses connaissances avec moi à cette occasion. Merci également à Eva, Stefania et Matteo pour leur présence sur place.

La thèse a été pour moi l'occasion de nombreuses conférences et rencontres. Merci à mes compagnons *espaces de Banach* : Eva (my roomate!), Tony, Pedro, Michal, Pavlos, Stefania, Florent et Jean. Bien sûr mes pensées vont vers Luis.

Je remercie le GdR AFHP pour les journées annuelles qui ont été l'occasion de rencontres avec l'analyse fonctionnelle française et également avec mes compatriotes doctorants! Merci à Hubert, Maxime, Corentin, Élodie, Romuald, Alain et Quentin de m'avoir accueillie parmi eux.

Cette thèse n'aurait évidemment pas été la même sans la présence des collègues doctorants du LMB. Merci à Émilie et Céline pour leur présence dès le début de la thèse et pour leur amitié qui, je l'espère, durera malgré les séparations. Merci à Firmin pour sa disponibilité, ses conseils et son accueil dans le bureau 422.

Je remercie maintenant les nouveaux : Cyril, Johann, Marine, Clément, Guillaume, Olga, Othman, François et Colin (futur nouveau) qui instaurent une grande cohésion entre les doctorants et une très bonne ambiance.

Je tiens également à remercier les collègues de (plus ou moins) courte durée : Rachele, Pammella et Paul.

Merci à Arthur pour ces moments de partage sur Hangout et pour sa présence à ma soutenance.

Enfin un mot pour mes compagnons de route : Michel et Charlotte. Ce fut un plaisir de faire ce chemin avec vous. Je voudrais remercier plus spécialement Charlotte, malgré 9 années passées côte à côte, il nous aura fallu du temps avant de vraiment nous rencontrer. Mais ça valait la peine d'attendre : mes années de thèse n'auraient pas été si parfaites sans elle à mes côtés.

Je voudrais maintenant remercier les amis du labo d'optique : Clément, Jacques, Lulu, Pierre-Ambroise, Justine, Paul-Antoine, Antonio, Thomas et celles et ceux qui s'y rattachent : Aude, Pierre, Kathi et Mélaine.

Merci aux voisins pour toutes ces soirées passées ensemble : Fanny et Pierre puis Marion et Romain.

Merci aux copains de tous les horizons : ma bikette, Nathapon, Arnaud, Julie, Méla, Anouck, Pablo, Ludi, Quinou, Gwen, Micka, Blanca, Pamela, Marie-Lyse et Thibault.

Je remercie ma belle famille pour leur accueil et leur soutien.

Bien évidemment je voudrais également remercier ma famille d'être toujours là pour moi et de m'avoir toujours encouragée. Merci à ma maman : c'est à elle que je dois tout. Ce travail est le sien. Merci à ma soeur d'être présente chaque jour à mes côtés, même loin on sera toujours ensemble. Et merci à Lyne, d'être là et rayonnante.

Pour finir je tiens à remercier Batiste d'avoir partagé cette expérience avec moi, de m'avoir toujours soutenue et encouragée, même lorsque que ça n'était pas plus simple pour lui ! Je le remercie également de sa présence auprès de Minnie lors de mes nombreux déplacements...

Table des matières

Introduction

1. Espaces Lipschitz-libres

Soit (M, d) un espace métrique pointé, c'est-à-dire dans lequel est distingué un point particulier, noté 0. Notons $Lip_0(M)$ l'espace des fonctions Lipschitziennes à valeurs réelles, qui s'annulent en l'origine. Muni de la norme définie par la constante de Lipschitz :

$$\|f\|_L = \sup_{\substack{x,y \in M \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}, f \in Lip_0(M),$$

cet espace est un espace de Banach. Pour $x \in M$, définissons $\delta_x \in Lip_0(M)^*$ par $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in Lip_0(M)$.

Définition 1. L'**espace Lipschitz-libre** sur M, noté $\mathcal{F}(\mathbf{M})$, est le sous-espace de $Lip_0(M)^*$ suivant :

$$\mathcal{F}(M) = \overline{\text{vect}}\{\delta_x \ ; \ x \in M\}.$$

Remarquons que le caractère de densité de $\mathcal{F}(M)$ est le même que celui de M. En particulier $\mathcal{F}(M)$ est séparable si et seulement si M l'est. De plus si D est une partie dense de M, alors $\mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(M)$.

Notons également que l'application $\delta_M : M \to \mathcal{F}(M)$ définie par $\delta_M(x) = \delta_x$ pour $x \in M$, est une isométrie.

Fait 2. *Le dual de $\mathcal{F}(M)$ est linéairement isométrique à l'espace $Lip_0(M)$.*

Cette identification se fait grâce à une isométrie linéaire J définie sur $Lip_0(M)$ à valeurs dans $\mathcal{F}(M)^*$: pour $f \in Lip_0(M)$, $J(f)$ est définie par $J(f)(\delta_x) = f(x)$, $x \in M$.

L'espace $Lip_0(M)$ étant le dual de $\mathcal{F}(M)$, il est muni d'une topologie préfaible. Sur les bornés de $Lip_0(M)$, cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence simple. Ceci permet de montrer qu'en choisissant une origine z_0 différente, l'espace Lipschitz-libre obtenu $\mathcal{F}_{z_0}(M)$ est linéairement isométrique à $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}_0(M)$. En effet l'opérateur $f \mapsto f - f(z_0)\mathbf{1}_M$ de $Lip_0(M)$ dans $Lip_{z_0}(M)$ est une isométrie linéaire surjective, continue pour la topologie de la convergence simple, c'est donc l'adjoint d'une isométrie linéaire surjective de $\mathcal{F}_{z_0}(M)$ sur $\mathcal{F}(M)$.

Une étude détaillée des espaces Lipschitz-libres est faite dans le livre de Weaver [W] où ils sont appelés *espaces de Arens-Eells*. L'appellation d'espace Lipschitz-libre et la notation $\mathcal{F}(M)$ sont dues à Godefroy et Kalton en 2003 dans [G-K]. Cet article contient des résultats majeurs à ce sujet et en popularisera l'étude.

Illustrons maintenant le fait que l'étude des espaces Lipschitz-libres a sa place dans la classification non linéaire des espaces de Banach et plus particulièrement dans la classification Lipschitzienne.

Fait 3. *Soient M et N deux espaces métriques pointés et $f : M \to N$ une application Lipschitzienne vérifiant $f(0_M) = 0_N$. Alors il existe une unique application linéaire $\hat{f} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ vérifiant $\|f\|_L = \|\hat{f}\|$ et $\delta_N \circ f = \hat{f} \circ \delta_M$.*

Autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \delta_M \big\downarrow & & \big\downarrow \delta_N \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{F}(N) \end{array}$$

En particulier deux espaces de Banach Lipschitz-équivalents ont des espaces Lipschitz-libres isomorphes. Cependant la réciproque n'est pas vraie. En effet, Dutrieux et Ferenczi [D-F] ont montré que lorsque M est un espace métrique infini et compact, l'espace Lipschitz-libre sur l'espace des fonctions continues sur M est isomorphe à $\mathcal{F}(c_0(\mathbb{N}))$.

Le Fait 3 autorise, lorsque N est un sous-ensemble d'un espace métrique pointé M contenant 0, à considérer $\mathcal{F}(N)$ comme un sous-espace de $\mathcal{F}(M)$.

Enfin, il permet en quelque sorte de linéariser des problèmes Lipschitziens en passant aux espaces Lipschitz-libres. Cependant, malgré la simplicité de leur définition, la structure linéaire de ces espaces est peu connue et difficile à étudier. Par exemple, nous savons que l'espace Lipschitz-libre sur $\mathbb{R}$ est linéairement isométrique à L_1, mais il a été montré par Naor et Schechtman [N-S] que $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^2)$ et en particulier $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ ne sont pas isomorphes à un sous-espace de L_1. Finalement les espaces métriques dont l'espace Lispchitz-libre est isométrique à un sous-espace de L_1 ont été caractérisés par Godard [G]. Rappelons la définition d'un arbre réel :

Définition 4. Un espace métrique (T, d) est un **arbre réel** lorsque :

1. pour tout x, y dans T, il existe une unique isométrie $\phi_{x,y} : [0, d(x, y)] \to T$ telle que $\phi_{x,y}(0) = x$ et $\phi_{x,y}(d(x, y)) = y$.
2. toute application $\varphi : [0, 1] \to T$ continue et injective a la même image que l'isométrie $\phi_{\varphi(0),\varphi(1)}$.

Théorème 5 (Godard)**.** *Soit (M, d) un espace métrique pointé. Alors $\mathcal{F}(M)$ est linéairement isométrique à un sous-espace de L_1 si et seulement si M se plonge isométriquement dans un arbre réel.*

De plus, si M est lui-même un arbre réel, alors l'espace $\mathcal{F}(M)$ est linéairement isométrique à L_1.

Dans leur article [G-K], Godefroy et Kalton ont montré le résultat suivant en utilisant la théorie des espaces Lipschitz-libres :

Théorème 6 (Godefroy, Kalton)**.** *Soient X et Y deux espaces de Banach tels que X soit séparable et qu'il existe une isométrie (non linéaire) de X dans Y. Alors X est linéairement isométrique à un sous-espace de Y.*

En notant $i : X \to Y$ une isométrie non linéaire, remarquons que la conclusion du théorème n'est pas que $i(X)$ est un sous-espace de Y linéairement isométrique à X, mais bien qu'un tel sous-espace existe. Un contre-exemple classique est l'isométrie

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \ell_\infty^2 \\ t & \mapsto & (t, \sin(t)) \end{array}$$

dont l'image n'est clairement pas linéairement isométrique à un sous-espace vectoriel de ℓ_∞^2.

Pour conclure cette introduction sur les espaces Lipschitz-libres et plus particulièrement sur leurs liens avec la classification non linéaire des espaces de Banach, mentionnons un résultat dû à Kalton [K1].

Donnons tout d'abord quelques définitions :

Définition 7. Un espace de Banach a **la propriété de Schur** lorsque toute suite convergeant faiblement converge fortement.

Définition 8. Une application $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est **une jauge** lorsqu'elle est continue, croissante, sous-additive et vérifie $\omega(0) = 0$ et $\omega(t) \geq t$, pour $0 \leq t \leq 1$.
Un jauge ω est **non triviale** lorsque de plus $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\omega(t)}{t} = +\infty$.

Définition 9. Soit (M, d) un espace métrique et ω une jauge non triviale. L'espace $\mathcal{F}_\omega(M)$ est l'espace Lipschitz-libre sur $(M, \omega \circ d)$.

Enonçons maintenant le résultat de Kalton :

Théorème 10 (Kalton)**.** *Soit (M, d) un espace métrique et ω une jauge non triviale. Alors l'espace $\mathcal{F}_\omega(M)$ à la propriété de Schur.*

Il se déduit en particulier de ce théorème qu'il existe un espace de Banach X sans la propriété de Schur tel que $\mathcal{F}_\omega(X)$ l'ait. Ce résultat a, par exemple, permis à Suárez de la Fuente [SF] de montrer qu'il existe deux espaces $\mathcal{L}_\infty$, séparables et contenant chacun une copie isomorphique de $c_0(\mathbb{N})$, qui sont uniformément homéomorphes mais pas isomorphes.

2. Propriété d'approximation bornée

a. Propriétés d'approximation

Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'étude de la *propriété d'approximation bornée* sur les espaces Lipschitz-libres. Commençons par en donner la définition et certaines propriétés dans un contexte général. Pour une vue d'ensemble des différentes propriétés d'approximation, le lecteur est invité à consulter l'article de Cassaza [C1].

En 1955, Grothendieck [Gr] s'intéressa à la propriété d'approximation et en définit les variantes que nous allons étudier ici.

Définition 11. Un espace de Banach X a

- la **propriété d'approximation** (AP) si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble compact K de X, il existe un opérateur linéaire de rang fini $T : X \to X$ tel que $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$, pour tout $x \in K$.
- la **λ-propriété d'approximation bornée** (λ-BAP) avec $1 \leq \lambda < +\infty$, si de plus pour tout $\varepsilon > 0$ et tout K compact l'opérateur T peut-être choisi de norme inférieure à λ.
- S'il existe λ tel que X ait la λ-propriété d'approximation bornée, alors X a la propriété d'approximation bornée (BAP).
- la **propriété d'approximation métrique** (MAP) s'il a la 1-propriété d'approximation bornée.

Dans la définition de la BAP, les ensembles compacts K peuvent être remplacé par des ensembles finis. Ceci n'est pas vrai pour la définition de AP.

Définition 12. Un espace de Banach X a

- une **base de Schauder** s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que pour tout $x \in X$ il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\lim_{N\to+\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n - x \right\| = 0$.
- une **décomposition fini-dimensionnelle** (FDD) s'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces de dimension finie de X telle que pour tout $x \in X$, il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $x_n \in E_n$, telle que $\lim_{N\to+\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - x \right\| = 0$.

Si X est un espace de Banach, alors chaque affirmation implique la suivante :

- L'espace X a une base de Schauder.
- L'espace X a une FDD.
- L'espace X a la BAP.
- L'espace X a AP.

Toutes les réciproques sont fausses.

Lorsque l'espace considéré est séparable, il existe une caractérisation séquentielle de la BAP :

Proposition 13. *Un espace de Banach séparable X a la λ-propriété d'approximation bornée si et seulement s'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs linéaires sur X, de rang fini et convergeant fortement vers l'identité, telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq \lambda$.*

Une telle suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite approximante**.

Le théorème suivant a été montré par Grothendieck [Gr] dans le cas $\lambda = 1$ et par Johnson [J] dans le cas général.

Théorème 14 (Grothendieck ; Johnson)**.** *Si X est un espace de Banach et X^* a la λ-propriété d'approximation bornée, alors X a la λ-propriété d'approximation bornée.*

De plus, dans le cas d'un dual séparable, Grothendieck [Gr] a montré le résultat suivant :

Théorème 15 (Grothendieck)**.** *Soit X^* un dual séparable. Si X^* a la propriété d'approximation, alors X^* a la propriété d'approximation métrique.*

En particulier, X a la propriété d'approximation métrique.

Ce théorème explique pourquoi, dans le contexte de l'étude des propriétés d'approximation, il est intéressant de montrer qu'un espace est un dual.

b. Propriété d'approximation bornée sur les espaces Lipschitz-libres

L'étude de la propriété d'approximation bornée sur les espaces Lipschitz-libres a été initiée par Godefroy et Kalton dans leur article de 2003 [G-K]. Ils ont tout d'abord montré le résultat fondamental suivant :

Théorème 16 (Godefroy, Kalton)**.** *Soit X un espace de Banach de dimension finie. Alors $\mathcal{F}(X)$ a la propriété d'approximation métrique.*

Ce théorème leur a permis de démontrer que la BAP sur un espace de Banach est équivalente à la BAP sur son espace Lipchitz-libre.

Théorème 17 (Godefroy, Kalton)**.** *Soit X un espace de Banach et $\lambda \geq 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *L'espace X a la λ-propriété d'approximation bornée.*
- *L'espace $\mathcal{F}(X)$ a la λ-propriété d'approximation bornée.*
- *Pour tout K compact de X et tout $\varepsilon > 0$, il existe une application $f : X \to X$ Lipschitzienne, d'image dans un espace vectoriel de dimension finie, telle que $\|f\|_L \leq \lambda$ et $\|f(x) - x\| \leq \varepsilon$, pour tout $x \in K$.*
  Cette propriété est appelée λ-propriété d'approximation bornée Lipschitzienne.

En particulier une combinaison de ce résultat et du Fait 3 implique que la BAP est stable par Lipschitz-équivalence.

Borel-Mathurin s'est également intéressée à l'étude du lien entre espaces Lipschitz-libres et propriétés d'approximation dans [BM]. Tout d'abord elle a montré la caractérisation suivante de la BAP dans les espaces de Banach séparables.

Théorème 18 (Borel-Mathurin)**.** *Soit X un espace de Banach séparable tel qu'il existe $\lambda \geq 1$ et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-espaces de X ayant chacun la λ-BAP telle que $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ soit dense dans X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *L'espace X a la BAP.*
- *Il existe une suite d'opérateurs linéaires $T_n : X \to E_n$ uniformément bornés telle que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x, pour tout $x \in X$.*

· *Il existe une suite d'applications Lipschitziennes $f_n : X \to E_n$ de constantes de Lipschitz uniformément bornées telle que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x, pour tout $x \in X$.*

Le lemme que nous allons maintenant énoncer permet, pour prouver la BAP, de ne montrer que la convergence faible vers l'identité d'une suite d'opérateurs au lieu d'en montrer la convergence forte. Sa preuve repose sur le Lemme de Mazur et une extraction diagonale.

Lemme 19. *Soient X un espace de Banach séparable et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs sur X, linéaires et uniformément bornés, telle que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x, pour tout $x \in X$. Alors il existe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite approximante d'opérateurs sur X telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in \operatorname{conv}\{T_k, k \geq n\}$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$.*

Un combinaison de ce lemme et du théorème précédent donne le résultat suivant sur les espaces Lipschitz-libres.

Théorème 20 (Borel-Mathurin)**.** *Soit (M, d) un espace métrique séparable, $\lambda \geq 1$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-ensembles de M d'union dense telle que chaque $\mathcal{F}(M_n)$ ait la λ-BAP. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

· *L'espace $\mathcal{F}(M)$ a la BAP.*

· *Il existe une suite d'opérateurs linéaires $L_n : Lip_0(M_n) \to Lip_0(M)$ uniformément bornés et continus pour la topologie de la convergence simple telle que la suite $(L_n(f_{|M_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, pour tout $f \in Lip_0(M)$.*

Plaçons-nous sous les hypothèses de ce théorème. Si de plus il existe une suite d'opérateurs d'extension linéaire $E_n : Lip_0(M_n) \to Lip_0(M)$ uniformément bornés, alors la deuxième condition est satisfaite et donc $\mathcal{F}(M)$ a la BAP.

Quel que soit l'espace métrique M considéré et N un sous-ensemble de M, il existe bien un opérateur d'extension de $Lip_0(N)$ dans $Lip_0(M)$ qui ne modifie pas la constante de Lipschitz. C'est l'opérateur d'**inf-convolution** et il est donné par la formule suivante :

$$f(x) = \inf\{f(y) + \|f\|_L d(x, y) \ ; \ y \in N\}, \ f \in Lip_0(N), \ x \in M.$$

Cependant cet opérateur n'est pas linéaire.

Il a été montré par Godefroy et Ozawa [G-O] qu'il existe un espace métrique compact et convexe K tel que $\mathcal{F}(K)$ n'a pas AP. La construction de ce contre-exemple a motivé plus précisément l'étude des espaces métriques sur lesquels l'espace Lipschitz-libre a la BAP.

Finalement, très récemment Godefroy [Go3] a montré les caractérisations suivantes de la BAP sur l'espace Lipschitz-libre des espaces métriques compacts.

Théorème 21 (Godefroy)**.** *Soient (M, d) un espace métrique compact et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles finis de M telle que M_n soit ε_n-dense et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Pour une fonction f définie sur M, notons $R_n(f)$ sa restriction à M_n. Soit $\lambda \geq 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

· *L'espace $\mathcal{F}(M)$ a la λ-BAP.*

· *Il existe une suite de réels positifs* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$ *et pour tout espace de Banach* X*, il existe une suite d'opérateurs* $E_n : Lip_0(M_n, X) \to Lip_0(M, X)$ *vérifiant* $\|E_n\|_{L,L} \leq \lambda$ *et* $\|R_n E_n - Id\|_{L,\infty} \leq \alpha_n$.

· *Il existe une suite d'opérateurs* $G_n : Lip_0(M_n) \to Lip_0(M)$ *vérifiant* $\|G_n\|_{L,L} \leq \lambda$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\|R_n E_n - Id\|_{L,\infty} = 0$.

· *Pour tout espace de Banach* X*, il existe une suite de réels positifs* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n = 0$ *et pour toute fonction* 1*-Lipschitzienne* $F : M_n \to X$*, il existe une fonction* λ*-Lipschitzienne* $H : M \to X$ *vérifiant* $\|R_n(H) - F\|_{\ell_\infty(M_n,X)} \leq \beta_n$.

3. Résumé de la thèse

Nous avons déjà mentionné qu'une problématique relative aux espaces Lipschitz-libres est l'étude de leur structure linéaire. Au vu du résultat de Godefroy et Ozawa [G-O], il est naturel de se demander quels sont les espaces métriques dont l'espace Lipschitz-libre a, ou n'a pas, la propriété d'approximation, la propriété d'approximation bornée ou la propriété d'approximation métrique.

Le Théorème 15 justifie l'utilité, dans ce contexte, de montrer qu'un espace Lipschitz-libre est un dual. Le premier chapitre de cette thèse sera donc consacré à la dualité. Dans une première section nous énoncerons un théorème, démontré indépendamment par Petunīn et Plīčhko [P-P] et Godefroy [Go1], permettant de montrer qu'un espace de Banach séparable est le dual d'un sous-espace de son dual, sous certaines conditions. Nous détaillerons ensuite comment appliquer ce théorème dans le cadre des espaces Lipschitz-libres.

La deuxième section sera consacrée aux espaces petit-Lipschitz, notés lip_0. Nous en donnerons la définition et les propriétés utiles à la suite de notre étude. Nous porterons une attention plus particulière aux espaces petits-Lipschitz sur les espaces métriques compacts. Nous montrerons que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique compact M est le dual de $lip_0(M)$ dès que M est dénombrable ou ultramétrique.

Dans une troisième section nous définirons un sous-espace de Lip_0 qui jouera le même rôle que jouait lip_0 dans le cas des espaces compacts, mais cette fois-ci pour les espaces métriques propres. Enfin nous montrerons que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique propre dénombrable ou un espace ultramétrique propre est un espace dual.

Dans le deuxième chapitre nous montrerons que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique propre et dénombrable a la MAP. Pour cela nous énoncerons un résultat dû à Kalton [K1] que nous appellerons "décomposition de Kalton". Cette décomposition permet de conclure directement que si M est la réunion d'une suite convergente et sa limite, alors son espace Lipschitz-libre a la BAP.

Partant de cette observation, une idée pour obtenir la même conclusion pour des compacts dénombrables en général serait d'utiliser la propriété des trois espaces de Godefroy et Saphar [G-S]. La deuxième section de ce chapitre sera dédiée à la construction d'un contre-exemple à l'utilisation de cette propriété dans ce contexte.

Dans une troisième section nous montrerons que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique compact dénombrable a la MAP. Pour cela nous utiliserons une récurrence transfinie dans laquelle, à chaque étape, nous appliquerons la décomposition de Kalton. Nous avons déjà mentionné que cette décomposition ne donne pas des opérateurs de norme 1, donc pour que la constante de BAP n'explose pas avec la récurrence, nous appliquerons à chaque étape le Théorème 15 grâce au fait que l'espace Lipschitz-libre considéré est un dual.

Enfin, en combinant une fois de plus la décomposition de Kalton et le Théorème 15, le résultat précédent permettra de montrer que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique propre et dénombrable a la MAP.

Le troisième chapitre sera dédié à l'étude des espaces Lipschitz-libres sur des espaces ultramétriques. Nous montrerons dans un premier temps que lorsque l'espace ultramétrique est propre, son espace Lipschitz-libre a la MAP. Ce résultat a été généralisé par Cúth et Doucha dans [C-D] où ils ont montré que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique séparable a une base de Schauder monotone.

En utilisant la caractérisation due à Godard (Théorème 5) des espaces métriques dont l'espace Lipschitz-libre est un sous-espace de L_1 et le fait que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique propre est un dual, nous montrerons que ce dernier espace est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$, résultat également généralisé par Cúth et Doucha [C-D] à tous les espaces ultramétriques séparables. Nous obtiendrons de plus que si M est un espace ultramétrique propre, alors $\mathcal{F}(M)$ admet un prédual isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$, ce prédual étant $lip_0(M)$ lorsque M est un espace ultramétrique compact.

Nous montrerons dans une troisième section que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique M n'est jamais isométrique à un espace ℓ_1, ce résultat a été obtenu de manière indépendante par Cúth et Doucha [C-D]. Pour cela, nous étudierons les points extrémaux de la boule unité de $Lip_0(M)$ et montrerons qu'il en existe deux à distance strictement inférieure à 2, ce qui n'est pas le cas dans un espace ℓ_∞. Les points extrémaux étant préservés par isométrie linéaire, nous en déduirons que $Lip_0(M)$ n'est pas linéairement isométrique à un espace ℓ_∞. En particulier $\mathcal{F}(M)$ n'est pas linéairement isométrique à un espace ℓ_1. Lorsque de plus M est fini de cardinal n, nous verrons que la boule unité de $Lip_0(M)$ ne s'écrit pas comme intersection de moins de $n(n+1)-1$ demi-espaces. Les résultats de cette section et de la section suivante ont été obtenus en collaboration avec Pedro Kaufmann et Antonín Prochazká.

Nous savons qu'un espace ultramétrique séparable est isométrique à un sous-ensemble d'un arbre réel séparable [Bu], nous nous sommes donc intéressés de manière plus générale à de tels sous-ensembles. Nous montrerons dans une quatrième section que sous certaines conditions, la boule unité de l'espace Lipschitz-libre sur un sous-ensemble d'un arbre réel séparable admet des points extrémaux à distance inférieure à 1.

En annexe, nous nous intéresserons à l'article [B] de Bourgain dans lequel il démontre que chacun des ℓ_1^n est contenu de manière complémentée dans $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N}))$, uniformément en n. Nous adapterons la preuve de ce résultat pour montrer que $\ell_1(\mathbb{N})$ est complémenté dans $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N}))$.

4. Notations

Donnons ici les notations que nous adopterons par la suite.

Soit A un ensemble. Notons $\#A$ son cardinal.

Soit (M,d) un espace métrique. Notons
- $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de M,
- $Lip(M)$ l'espace des fonctions Lipschitziennes sur M à valeurs réelles,
- $B(x,r)$ la boule ouverte de centre $x \in M$ et de rayon $r > 0$,
- $\overline{B}(x,r)$ la boule fermée correspondante.
  Remarquons que l'ensemble $\overline{B}(x,r) = \{y \in M \ ; \ d(x,y) \leq r\}$ est en général différent de l'adhérence de $B(x,r)$, notée $\overline{B(x,r)}$.

Pour deux espaces métriques (M,d) et (N,δ), notons τ_p la topologie de la convergence simple sur l'ensemble des applications de M dans N.

Soit X un espace de Banach. Notons
- B_X sa boule unité ouverte,
- $\overline{B}_X$ sa boule unité fermée,
- S_X sa sphère unité,
- X^* son dual et w^* sa topologie préfaible.

Soient X et Y deux espaces de Banach. Notons $X \equiv Y$ lorsqu'il existe une isométrie linéaire surjective de X dans Y.

Les notations utilisées plus tard mais non mentionnées ici sont soit des notations standards, soit précisées dans le corps du texte.

Introduction
English version

1. Lipschitz-free spaces

Let (M,d) be a pointed metric space, that is a metric space with an origin 0. Define $Lip_0(M)$ as the space of Lipschitz real valued functions vanishing at 0. Endowed with the norm defined by the Lipschitz constant

$$\|f\|_L = \sup_{\substack{x,y\in M\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)},$$

this space is a Banach space.

Let $x \in M$ and define $\delta_x \in Lip_0(M)^*$ by $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in Lip_0(M)$.

Definition 1. The **Lipschitz-free space** over M, denoted $\mathcal{F}(\mathbf{M})$, is the following subspace of $Lip_0(M)^*$:

$$\mathcal{F}(M) = \overline{\mathrm{vect}}\{\delta_x \ ; \ x \in M\}.$$

Notice that the density character of $\mathcal{F}(M)$ is the same as the density character of M. In particular, $\mathcal{F}(M)$ is separable if and only if M is separable. Moreover, if D is a dense subset of M, then $\mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(M)$.

We also note that the map $\delta_M : M \to \mathcal{F}(M)$ defined by $\delta_M(x) = \delta_x$ for $x \in M$, is an isometry.

Fact 2. *The dual space of $\mathcal{F}(M)$ is linearly isometric to $Lip_0(M)$.*

The identification is given by an onto linear isometry J from $Lip_0(M)$ onto $\mathcal{F}(M)^*$: for $f \in Lip_0(M)$, $J(f)$ is defined by $J(f)(\delta_x) = f(x)$, $x \in M$.

The space $Lip_0(M)$ being a dual space, it admits a w^*-topology and this topology coincides with the pointwise topology on bounded subsets of $Lip_0(M)$. It follows that, given a different origin z_0, the new Lipschitz-free space $\mathcal{F}_{z_0}(M)$ is linearly isometric to $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}_0(M)$. Indeed, the operator $f \mapsto f - f(z_0)\mathbf{1}_M$ from $Lip_0(M)$ to $Lip_{z_0}(M)$ is an onto linear isometry which is pointwise continuous. Thus it is the adjoint of an onto linear isometry from $\mathcal{F}_{z_0}(M)$ to $\mathcal{F}(M)$.

A detailed study of Lipschitz-free spaces is made in Weaver's book [W] where they are called *Arens-Eells spaces*. The name of Lispchitz-free spaces and the notation $\mathcal{F}(M)$ are due to

Godefroy and Kalton in [G-K], this paper contains major results in this area and has popularized its study.

We will now give an idea of how the study of Lipschitz-free spaces takes place in the non linear classification of Banach spaces and in particular in the Lipschitz-classification.

Fact 3. *Let M and N be two pointed metric spaces and $f : M \to N$ be a Lipschitz map with $f(0_M) = 0_N$. Then there exists a unique linear map $\hat{f} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ such that $\|f\|_L = \|\hat{f}\|$ and $\delta_N \circ f = \hat{f} \circ \delta_M$.*

In other words, the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_M"'] & N \arrow[d, "\delta_N"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "\hat{f}"] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

Therefore two Banach spaces which are Lipschitz-isomorphic have their Lipschitz-free spaces linearly isomorphic. However the converse is not true. Indeed Dutrieux and Ferenczi [D-F] have proved that if M is an infinite compact metric space, then the Lipschitz-free space over the space of continuous functions on M is isomorphic to $\mathcal{F}(c_0(\mathbb{N}))$.

Thanks to Fact 3, when N is a subset of a pointed metric space M which contains 0, we can see $\mathcal{F}(N)$ as a subspace of $\mathcal{F}(M)$.

Finally, in some sense, this fact allows to linearize Lipschitz problems by moving to Lipschitz-free spaces. However, despite the simplicity of their definition, the linear structure of Lipschitz-free spaces is not well-known and is difficult to study. For instance, we know that $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ is linearly isometric to L_1, but Naor and Schechtman [N-S] have proved that $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^2)$ and in particular $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ are not isomorphic to any subspace of L_1. To conclude this remark, metric spaces having their Lipschitz-free space linearly isometric to a subspace of L_1 have been characterize by Godard [G]. To state this theorem we need the following definition:

Definition 4. A metric space (T, d) is said to be an **$\mathbb{R}$-tree** when:

1. for every x, y in T, there exists a unique isometry $\phi_{x,y} : [0, d(x, y)] \to T$ such that $\phi_{x,y}(0) = x$ and $\phi_{x,y}(d(x, y)) = y$.
2. every map $\varphi : [0, 1] \to T$ which is continuous and one-to-one has the same range as the isometry $\phi_{\varphi(0),\varphi(1)}$.

Theorem 5 (Godard)**.** *Let (M, d) be a pointed metric space. The space $\mathcal{F}(M)$ is linearly isometric to a subspace of L_1 if and only if M can be isometrically embedded into an $\mathbb{R}$-tree.*

Moreover, if M is an $\mathbb{R}$-tree itself, its Lipschitz-free space is linearly isometric to L_1.

In the paper [G-K], Godefroy and Kalton have proved the following, using the Lipschitz-free space theory:

Theorem 6 (Godefroy, Kalton)**.** *Let X and Y be two Banach spaces such that X is separable and there exists an isometry from X into Y. Then X is linearly isometric to a subspace of Y.*

Let $i : X \to Y$ denote a non linear isometry. Observe that the conclusion of this theorem is not that $i(X)$ is a subspace of Y which is linearly isometric to X, but that there exists such a subspace. The following isometry is a classical counter-example of this remark

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \ell_\infty^2 \\ t & \mapsto & (t, \sin(t)) \end{array}.$$

Its range is clearly not a subspace of ℓ_∞^2.

In order to conclude this introduction to Lipschitz-free spaces and in particular to their link with non linear classification of Banach spaces, let us mention a result due to Kalton [K1]. Let me recall some definitions:

Definition 7. A Banach space has **Schur's property** when every weakly-convergent sequence is strongly-convergent.

Definition 8. A map $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ is **a gauge** when it is continuous, increasing, subadditive and verifies $\omega(0) = 0$ and $\omega(t) \geq t$, for $0 \leq t \leq 1$.
A gauge ω is **non-trivial** when moreover $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\omega(t)}{t} = +\infty$.

Definition 9. For a metric space (M, d) and a non trivial gauge ω, define $\mathcal{F}_\omega(M)$ as the Lipschitz-free space over $(M, \omega \circ d)$.

The result of Kalton is the following:

Theorem 10 (Kalton)**.** *Let (M, d) be a metric space and ω a non trivial gauge. Then the space $\mathcal{F}_\omega(M)$ has Schur's property.*

One can in particular deduce that there exists a Banach space X failing Schur's property such that $\mathcal{F}_\omega(X)$ has it. This result allows for example Suárez de la Fuente [SF] to prove that there exist two separable $\mathcal{L}_\infty$-spaces such that each of them contains an isomorphic copy of $c_0(\mathbb{N})$, which are uniformly homeomorphic but not isomorphic.

2. Bounded approximation property

a. Approximation properties

We will focus more particularly on the study of the bounded approximation property on Lipschitz-free spaces. Let us start by giving definitions and properties in a general setting. For a survey about the different notions of approximation properties, we refer the reader to the article of Cassaza in [C1].

In 1955, Grothendieck [Gr] turned its interest to the approximation property and defined the following variations of this notion:

Definition 11. A Banach space X is said to have

- the **approximation property** (AP) if for every $\varepsilon > 0$ and every compact subset K of X, there exists a finite rank operator $T : X \to X$ such that $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$, for every $x \in K$.
- the **λ-bounded approximation property** (λ-BAP) with $\lambda \geq 1$, if moreover for every $\varepsilon > 0$ and every K compact the operator T can be chosen with norm less than λ.
- If there exists λ such that X has the λ-bounded approximation property, then X is said to have the bounded approximation property (BAP).
- the **metric approximation property** (MAP) when it has the 1-bounded approximation property.

In the definition of the BAP the compact set K can be replaced by a finite subset of X. This is not true in the definition of the AP.

Definition 12. A Banach space X is said to have

- a **Schauder basis** if there is a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X such that for every $x \in X$ there exists a unique sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of real numbers with $\lim\limits_{N\to+\infty} \left\| \sum\limits_{n=1}^{N} a_n x_n - x \right\| = 0$.
- a **finite dimensional decomposition** (FDD) if there is a sequence $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of finite dimensional subspaces of X such that for every $x \in X$, there exists a unique sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in E_n$, with $\lim\limits_{N\to+\infty} \left\| \sum\limits_{n=1}^{N} x_n - x \right\| = 0$.

For a Banach space X, each affirmation implies the following:

- The space X has a Schauder basis.
- The space X has a FDD.
- The space X has the BAP.
- The space X has the AP.

Each converse is false.

For a separable Banach space there is a sequential characterization of the BAP:

Proposition 13. *A separable Banach space X has the λ-bounded approximation property if and only if there exists $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of finite rank operators on X which strongly converges to the identity and such that $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq \lambda$.*

Such a sequence $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is called an **approximating sequence**.

The following result has been proved by Grothendieck [Gr] when $\lambda = 1$ and Johnson [J] in the general case.

Theorem 14 (Grothendieck ; Johnson)**.** *Let X be a Banach space such that X^* has the λ-bounded approximation property. Then X has the λ-bounded approximation property.*

Moreover, for a separable dual, Grothendieck [Gr] has proved the following:

Theorem 15 (Grothendieck). *Let X^* be a separable dual space. If X^* has the approximation property, then it has the metric approximation property.*
In particular, X has the metric approximation property.

This theorem explains why, in the context of the study of approximation properties, it is useful to prove that a space is a dual space.

b. Bounded approximation property on Lipschitz-free spaces

The study of the BAP on Lipschitz-free spaces has been initiated by Godefroy and Kalton in their paper [G-K]. They first have proved the fundamental following result:

Theorem 16 (Godefroy, Kalton). *Let X be a finite dimensional Banach space. Then $\mathcal{F}(X)$ has the metric approximation property.*

This theorem is a key ingredient to prove the following:

Theorem 17 (Godefroy, Kalton). *Let X be a Banach space and $\lambda \geq 1$. The following are equivalent:*

- *The space X has the λ-bounded approximation property.*
- *The space $\mathcal{F}(X)$ has the λ-bounded approximation property.*
- *For every compact subset K of X and every $\varepsilon > 0$, there exists $f : X \to X$ a Lipschitz map with finite dimensional range such that $\|f\|_L \leq \lambda$ and $\|f(x) - x\| \leq \varepsilon$, for every $x \in K$.*
  This property is called λ-Lipschitz bounded approximation property.

In particular, combining this theorem with Fact 3 one obtains that the BAP is stable under Lipschitz isomorphisms.

Borel-Mathurin also got interested in the study of the approximation properties on Lipschitz-free spaces in [BM]. First of all, she has proved a characterization of the BAP on separable Banach spaces.

Theorem 18 (Borel-Mathurin). *Let X be a separable Banach space such that there exist $\lambda \geq 1$ and $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an increasing sequence of subspaces of X with the λ-BAP such that $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ is dense in X. The following are equivalent:*

- *The space X has the BAP.*
- *There exists a sequence of uniformly bounded linear operators $T_n : X \to E_n$ such that $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ strongly converges to x, for every $x \in X$.*
- *There exists a sequence of Lipschitz maps $f_n : X \to E_n$ with uniformly bounded Lipschitz constants such that $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ strongly converges to x, for every $x \in X$.*

The following lemma is based on Mazur's Lemma and a classical diagonal argument. When one wants to prove the BAP it allows to prove the weak convergence to the identity of a sequence of operators instead of proving the strong convergence.

Lemma 19. *Let X be a separable Banach space and $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of uniformly bounded operators on X such that $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ weakly converges to x, for every $x \in X$. Then there exists $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an approximating sequence of operators on X such that $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$ and for every $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in \operatorname{conv}\{T_k, k \geq n\}$.*

By combining this lemma with the preceding theorem one obtains this result on Lipschitz-free spaces:

Theorem 20 (Borel-Mathurin)**.** *Let (M, d) be a separable metric space, $\lambda \geq 1$ and $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an increasing sequence of subsets of M with dense union such that each $\mathcal{F}(M_n)$ has the λ-BAP. The following are equivalent:*

- *The space $\mathcal{F}(M)$ has the BAP.*
- *There exists a sequence $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of linear operators from $Lip_0(M_n)$ into $Lip_0(M)$, uniformly bounded and continuous for the pointwise topology such that $(L_n(f_{|M_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ pointwise converges to f, for every $f \in Lip_0(M)$.*

Under these hypotheses, if there is a sequence of uniformly bounded linear extension operators $E_n : Lip_0(M_n) \to Lip_0(M)$, then the second condition is satisfied and $\mathcal{F}(M)$ has the BAP.

For every metric space M and every subset N of M, there exists an extension operator from $Lip_0(N)$ into $Lip_0(M)$ which preserves the Lipschitz constant. This is the **inf-convolution** operator and it is given by the formula

$$f(x) = \inf\{f(y) + \|f\|_L d(x, y) \ ; \ y \in N\}, \ f \in Lip_0(N), \ x \in M.$$

However this operator is not linear.

It has been proved by Godefroy and Ozawa [G-O] that there exists a compact convex metric space K such that $\mathcal{F}(K)$ fails the AP. This counter-example justified more precisely the study of metric spaces over which the Lipschitz-free space has the BAP.

To conclude, very recently Godefroy [Go3] has proved the following characterizations of the BAP on Lipschitz-free spaces over compact metric spaces.

Theorem 21 (Godefroy)**.** *Let (M, d) be a compact metric space and $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of finite subsets of M such that M_n is ε_n-dense in M with $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. For a map f defined on M, denote $R_n(f)$ its restriction to M_n. Let $\lambda \geq 1$. The following are equivalent:*

- *The space $\mathcal{F}(M)$ has the λ-BAP.*
- *There exists a sequence $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of positive numbers such that $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ and for every Banach space X, there exist linear operators $E_n : Lip_0(M_n, X) \to Lip_0(M, X)$ with $\|E_n\|_{L,L} \leq \lambda$ and $\|R_n E_n - Id\|_{L,\infty} \leq \alpha_n$.*
- *There exist linear operators $G_n : Lip_0(M_n) \to Lip_0(M)$ with $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n E_n - Id\|_{L,\infty} = 0$ and $\|G_n\|_{L,L} \leq \lambda$.*
- *For every Banach space X, there exists a sequence $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of positive numbers such that $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$ and for every 1-Lipschitz map $F : M_n \to X$, there is a λ-Lipschitz map $H : M \to X$ with $\|R_n(H) - F\|_{\ell_\infty(M_n,X)} \leq \beta_n$.*

3. Abstract

We have already mentioned that a problematic about Lipschitz-free spaces is the study of their linear structure. More precisely, in view of Godefroy and Ozawa's result [G-O], one can ask what are the metric spaces whose Lispchitz-free space has, or fails, the approximation property, the bounded approximation property or the metric approximation property.

Theorem 15 justifies why it is useful, in this context, to prove that a Lipschitz-free space is a dual space. In the first chapter we will study the duality of Lipschitz-free spaces. First of all we will state a theorem, proved independently by Petunīn and Plīčhko [P-P] and Godefroy [Go1], that we will use in order to obtain that a Banach space is the dual space of a subspace of its dual, under some conditions. Then we will detail how to use this theorem with Lispchitz-free spaces.

The second section will be about little-Lipschitz spaces, denoted lip_0. We will give its definition and some properties we will need in our study. More particularly we will turn our attention to little-Lipschitz spaces on compact metric spaces. We will prove that the Lipschitz-free space over a compact metric space M is the dual space of $lip_0(M)$ when M is countable or ultrametric.

In the third section we will consider a subspace of Lip_0 which will play the same role as lip_0 in the case of compact spaces, but for proper metric spaces. Similarly we will prove that the Lipschitz-free space over a countable or ultrametric proper metric space is a dual space.

In the second chapter we will prove that the Lipschitz-free space over a countable and proper metric space has the MAP. To do so we will state a result due to Kalton [K1] which, for any metric space M, gives a sequence of uniformly bounded linear operators on $\mathcal{F}(M)$. Note that the uniform bound is not 1. Thanks to this result one can directly conclude that if M is a countable compact metric space of ordre one, then its Lipschitz-free space has the BAP.

From this observation, an idea to generalize the result to countable compact metric spaces of every order could be to use the three-space property of Godefroy and Saphar [G-S]. In the second section of this chapter we will construct a counter-example to the use of this property in this context.

In the third section we will prove that the Lipschitz-free space over a countable compact metric space has the MAP. We will use a transfinite induction in which, in every step we will apply the result of Kalton. We have already mentioned that, with this result, we do not obtain norm 1 operators, thus, in order to keep control on the BAP constant, we can use Theorem 15 because the Lipschitz-free space is a dual space.

Finally, combining again the result of Kalton and Theorem 15, the last mentioned result permits to conclude that the Lipschitz-free space over a countable proper metric space has the MAP.

The third chapter will be devoted to the study of Lipschitz-free spaces over ultrametric spaces. We will first prove that if M is a proper ultrametric space, then $\mathcal{F}(M)$ has the MAP. This result has been generalized by Cúth and Doucha [C-D] where they have proved the existence of a monotone Schauder basis for the Lipschitz-free space over a separable ultrametric space.

Using the characterization of metric spaces whose Lipschitz-free space is a subspace of L_1 due to Godard (Theorem 5) and the fact that the Lipschitz-free space over a proper ultrametric space is a dual space, we will prove that this last space is isomorphic to $\ell_1(\mathbb{N})$. This result has also been generalized by Cúth and Doucha [C-D] to every separable ultrametric spaces. When M is a proper ultrametric space we obtain that $\mathcal{F}(M)$ has a predual which is isomorphic to $c_0(\mathbb{N})$, this predual being $lip_0(M)$ in the case where M is compact.

The results of the two following sections have been obtained in a joint work with Pedro Kaufmann and Antonín Prochazká. In the third section of this chapter we will prove that the Lispchitz-free space over a ultrametric space is never isometric to a ℓ_1 space, this result has been proved independently by Cúth and Doucha [C-D]. To prove it we will study the extreme points of the unit ball of $Lip_0(M)$ and obtain that two of them are at distance less than two, which is not the case in a ℓ_∞ space. Extreme points being stable under linear isometry, we will deduce that $Lip_0(M)$ is not linearly isometric to a ℓ_∞ space and in particular $\mathcal{F}(M)$ is not linearly isometric to a ℓ_1 space. Moreover, when M is finite with n points, we will prove that the unit ball of $Lip_0(M)$ cannot be written as the intersection of less than $n(n+1)-1$ half-spaces.

We know that separable ultrametric spaces can be regarded as subsets of separable $\mathbb{R}$-trees [Bu], this is why we looked more generally at such subsets. We will prove in a fourth section that under some hypothesis, the unit ball of the Lipschitz-free space over a subset of a separable $\mathbb{R}$-tree admits extreme points at distance less than or equal to 1.

It has been proved by Bourgain [B] that the ℓ_1^n's are uniformly complemented in $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N})$. In the annex we will adapt the proof of this result to obtain that the space $\ell_1(\mathbb{N})$ is complemented into $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N}))$.

Chapitre 1

Dualité des espaces Lipschitz-libres

Ce chapitre sera consacré à l'étude de la dualité des espaces Lipschitz-libres sur des espaces métriques qui seront compacts ou propres. Dans un premier temps, nous énoncerons le théorème de Petunīn-Plīčhko et Godefroy qui permet de montrer, sous certaines conditions, qu'un espace de Banach est un dual. Puis nous expliquerons comment nous l'utiliserons dans le contexte des espaces Lipschitz-libres.

Dans une seconde section nous définirons les espaces petit-Lipschitz et donnerons certaines de leurs propriétés avant de montrer que lorsque M est un espace métrique compact, dénombrable ou ultramétrique, le dual de $lip_0(M)$ est l'espace $\mathcal{F}(M)$.

Pour terminer nous nous intéresserons aux espaces propres. Nous suivrons le même plan que dans le cas des espaces compacts mais au lieu de considérer l'espace lip_0, nous en considérerons un sous-espace bien choisi.

1.1 Théorème de Petunīn-Plīčhko et Godefroy

Dans cette section nous allons énoncer le théorème que nous utiliserons principalement pour montrer qu'un espace Lipschitz-libre est un espace dual.

Ce théorème, démontré en 1974 en URSS par Petunīn et Plīčhko [P-P], n'a pas été diffusé en dehors de ce pays au moment de sa découverte et a été démontré de manière indépendante par Godefroy en 1987 [Go1] (voir aussi [Go2]).

Définition 22. Soit X un espace de Banach. Un élément x^* de X^* **atteint sa norme** s'il existe $x \in S_X$ tel que $\|x^*\| = \langle x^*, x\rangle$.

L'ensemble des éléments de X^* qui atteignent leur norme est noté $NA(X)$.

Définition 23. Soit X un espace de Banach. Un sous-espace S_0 de X^* est **séparant** si, pour $x \in X$,

$$\langle x^*, x\rangle = 0, \forall x^* \in S_0 \Rightarrow x = 0.$$

Théorème 24 (Petunīn, Plīčhko ; Godefroy)**.** *Soit X un espace de Banach séparable et S_0 un sous-espace fermé de X^*. Si $S_0 \subset NA(X)$ et S_0 est séparant, alors S_0^* est linéairement isométrique à X.*

Le cadre d'utilisation de ce théorème sera le suivant :
Soit M un espace métrique pointé. Alors $\mathcal{F}(M)$ jouera le rôle de X et $Lip_0(M)$ celui de X^*. Il faudra ensuite, selon la nature de l'espace M considéré, définir S_0 le sous-espace de $Lip_0(M)$ vérifiant les hypothèses du théorème.

Au lieu de montrer que S_0 est séparant, nous montrerons en fait qu'il sépare uniformément les points de M.

Définition 25. Soit (M, d) un espace métrique pointé. Un sous-espace S_0 de $Lip_0(M)$ **sépare uniformément les points de** M lorsqu'il existe une constante $1 \leq c < +\infty$ telle que :

$$\forall x, y \in M, \exists h = h_{x,y} \in S_0 \text{ vérifiant } \|h\|_L \leq c \text{ et } \ |h(x) - h(y)| = d(x, y).$$

Proposition 26. *Soit (M, d) un espace métrique pointé et S un sous-espace de $Lip(M)$ vérifiant :*

$$f, g \in S \Rightarrow \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in S.$$

Si $S_0 = S \cap Lip_0(M)$ sépare uniformément les points de M, alors l'espace S_0 est séparant.

Preuve : Pour montrer que S_0 est séparant, nous utiliserons le lemme suivant, adapté du Lemme 3.2.3. dans [W] :

Lemme 27. *Supposons qu'il existe $1 \leq c < +\infty$ telle que :*

$$\forall x, y \in M, \exists h = h_{x,y} \in S_0 \textit{ vérifiant } \|h\|_L \leq c \textit{ et } \ |h(x) - h(y)| = d(x, y).$$

Alors, pour tout $f \in Lip(M)$ et pour tout $A \subset M$ fini, il existe $g \in S$ vérifiant $g_{|A} = f_{|A}$ et $\|g\|_L \leq c\|f\|_L$.

De plus si $f \in Lip_0(M)$, alors g peut être choisie dans S_0.

Preuve : Rappelons que S est stable par passage au minimum et au maximum et que S_0 sépare uniformément les points de M, en particulier S sépare uniformément les points de M.

Soit $f \in Lip(M)$ et $A \subset M$ fini. Alors quel que soit $x \neq y$ dans A, il existe $h_{x,y} \in S$ tel que $\|h_{x,y}\|_L \leq c$ et $|h_{x,y}(x) - h_{x,y}(y)| = d(x, y)$. Posons alors

$$f_{x,y} = \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \ h_{x,y}$$

et remarquons que $\|f_{x,y}\|_L \leq c\|f\|_L$ et $|f_{x,y}(x) - f_{x,y}(y)| = |f(x) - f(y)|$.

Quitte à multiplier $f_{x,y}$ par -1 et à remplacer $f_{x,y}$ par $f_{x,y} + (f(x) - f_{x,y}(x))$, supposons $f_{x,y}(x) = f(x)$ et $f_{x,y}(y) = f(y)$. Dans ce cas la fonction $f_{x,y}$ vérifie encore $\|f_{x,y}\|_L \leq c\|f\|_L$.

Posons finalement

$$g = \min_{x \in A} \max_{\substack{y \neq x \\ y \in A}} f_{x,y}.$$

Comme l'espace S est stable par passage au minimum et au maximum, la fonction g appartient à S. De plus, $\|g\|_L \leq c\|f\|_L$ et pour $z \in A$, $g(z) = f(z)$. En effet, $\max\limits_{\substack{y \neq z \\ y \in A}} f_{z,y}(z) = f(z)$ et donc

$g(z) \leq f(z)$. De plus, pour tout $x \in A\backslash\{z\}$, $\max\limits_{\substack{y\neq x \\ y\in A}} f_{x,y}(z) \geq f_{x,z}(z) = f(z)$, d'où $g(z) \geq f(z)$ et finalement $g_{|A} = f_{|A}$.

Si $f \in Lip_0(M)$, en considérant $A_0 = A \cup \{0\}$, il existe $g \in S$ tel que $\|g\|_L \leq c\|f\|_L$ et $g_{|A_0} = f_{|A_0}$. En particulier $g(0) = f(0) = 0$, donc $g \in S_0$. □

Revenons à la preuve de la Proposition 26. Soit $\gamma \in \mathcal{F}(M)$ tel que, pour tout $g \in S_0$, $\langle g, \gamma\rangle = 0$. Montrons que $\gamma = 0$, c'est-à-dire que pour tout $f \in Lip_0(M)$, $\langle f, \gamma\rangle = 0$.

Soit $f \in Lip_0(M)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$, $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\|\gamma - \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{x_i}\right\|_{\mathcal{F}(M)} \leq \frac{\varepsilon}{(1+c)\|f\|_L}.$$

D'après le lemme il existe $g \in S_0$ telle que $\|g\|_L \leq c\|f\|_L$ et $g_{|A} = f_{|A}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}|\langle f, \gamma\rangle| &\leq \left|\langle f-g, \gamma - \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{x_i}\rangle\right| + \left|\langle f-g, \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{x_i}\rangle\right| + |\langle g, \gamma\rangle| \\ &\leq \|f-g\|_L \frac{\varepsilon}{(1+c)\|f\|_L} \leq \varepsilon\end{aligned}$$

et $\gamma = 0$. Finalement, S_0 est séparant. □

En résumé nous avons montré la proposition suivante :

Proposition 28. *Soient (M, d) un espace métrique pointé et S un sous-espace de $Lip(M)$ tel que :*

- *S est stable par passage au maximum et au minimum,*
- *$S_0 = S \cap Lip_0(M)$ est un sous-espace fermé de $Lip_0(M)$ et*
- *$S_0 \subset NA(\mathcal{F}(M))$.*

Si S_0 sépare uniformément les points de M, alors l'espace $\mathcal{F}(M)$ est linéairement isométrique au dual de S_0.

Il est en fait possible d'énoncer un résultat équivalent au Corollaire 3.3.5 de [W] :

Proposition 29. *Soient (M, d) un espace métrique pointé et $S \subset Lip(M)$ stable par passage au maximum et au minimum tel que $S_0 = S \cap Lip_0(M)$ soit un sous-espace fermé de $Lip_0(M)$ vérifiant $S_0 \subset NA(\mathcal{F}(M))$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\exists a > 1 : \forall x, y \in M, \exists h \in S_0, \|h\|_L \leq a$ et $|h(x) - h(y)| = d(x, y)$,

(b) $\forall a > 1 : \forall x, y \in M, \exists h \in S_0, \|h\|_L \leq a$ et $|h(x) - h(y)| = d(x, y)$,

(c) $\exists b > 1 : \forall f \in Lip_0(M), \forall A \subset M$ fini, $\exists g \in S, \|g\|_L \leq b\|f\|_L$ et $g_{|A} = f_{|A}$,

(d) $\forall b > 1 : \forall f \in Lip_0(M), \forall A \subset M$ fini, $\exists g \in S, \|g\|_L \leq b\|f\|_L$ et $g_{|A} = f_{|A}$,

(e) *$S_0^* \equiv \mathcal{F}(M)$ et $S_0^{**} \equiv Lip_0(M)$.*

Dans [W] cet énoncé est donné pour S l'espace des fonctions petit-Lipschitz mais il est vrai dès que S est stable par passage aux maximum et minimum ($(a) \Rightarrow (c)$), S_0 fermé et dans $NA(\mathcal{F}(M))$ ($(c) \Rightarrow (e)$).

Lorsque l'espace métrique (M, d) est compact nous montrerons que l'espace $\mathcal{F}(M)$ est le dual de $lip_0(M)$. Lorsque (M, d) est un espace propre, nous montrerons que l'espace $S_0(M)$ suivant est un prédual de $\mathcal{F}(M)$:

$$S_0(M) = \left\{ f \in lip_0(M) \; ; \; \lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{x \text{ ou } y \notin \overline{B}(0,r) \\ x \neq y}} \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} = 0 \right\}.$$

1.2 Espaces petit-Lipschitz

1.2.1 Définition et propriétés

Dans Weaver [W] les espaces $lip_0(M)$ considérés sont ceux des espaces métriques compacts M. Nous allons définir ces espaces en toute généralité même si nous montrerons que $lip_0(M)$ est un prédual de $\mathcal{F}(M)$ uniquement dans le cas compact.

Définition 30. Soit (M, d) un espace métrique. L'espace $\mathbf{lip(M)}$ est le sous-espace de $Lip(M)$ formé des fonctions f qui vérifient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; : \; d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon d(x,y).$$

L'espace $\mathbf{lip_0(M)}$ des fonctions petit-Lipschitz est alors

$$lip_0(M) = lip(M) \cap Lip_0(M).$$

Remarque 31. L'espace $lip_0(M)$ est un sous-espace fermé de $Lip_0(M)$.

Exemples :

1. Si $f \in lip_0([0,1])$, alors f est dérivable et $f' \equiv 0$. De plus $f(0) = 0$, donc $lip_0([0,1]) = \{0\}$.
2. Si $M = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, les fonctions de $lip_0(M)$ sont les fonctions constantes égales à zéro autour de 0.
3. Si M est l'espace discret ($d(x,y) = 1, \forall x \neq y$), alors $lip_0(M) = Lip_0(M)$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il suffit de prendre $\delta = \frac{1}{2}$, par exemple.
4. Plus généralement, si M est uniformément discret ($\exists \theta > 0$ tel que $\forall x \neq y, d(x,y) \geq \theta$), alors $lip_0(M) = Lip_0(M)$ avec $\delta = \frac{\theta}{2}$ pour tout ε.

Nous avons vu précédemment que pour montrer qu'un espace S_0 est un prédual de $\mathcal{F}(M)$ en utilisant le théorème 24, nous aurons en particulier besoin de montrer que S est stable par passage au maximum et au minimum. C'est le cas de $lip(M)$ (cf. Proposition 3.1.4 [W]) :

Proposition 32. *Soient* (M, d) *un espace métrique et* $f, g \in lip(M)$.
Alors $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\} \in lip(M)$.

Preuve : Commençons par montrer que la composée d'une fonction de $lip(M)$ par une fonction Lipschitzienne est dans $lip(M)$. Soit $f \in lip(M)$ et $h : f(M) \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in lip(M)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d(x, y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\|h\|_L} d(x, y).$$

Alors,

$$d(x, y) \leq \delta \Rightarrow |h \circ f(x) - h \circ f(y)| \leq \|h\|_L |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon d(x, y)$$

et finalement $h \circ f \in lip(M)$.

Maintenant soient f et g dans $lip(M)$. D'après ce qui précède, $|f - g| \in lip(M)$. D'où $\max\{f, g\} = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$ et $\min\{f, g\} = \dfrac{f + g - |f - g|}{2} \in lip(M)$. □

D'après la Proposition 26 nous pouvons en déduire que si $lip_0(M)$ sépare uniformément les points de M, alors cet espace est séparant.

1.2.2 Cas particulier des espaces compacts

Lemme 33. *Soit* (M, d) *un espace métrique pointé compact. Alors les éléments de* $lip_0(M)$ *atteignent leur norme.*

Preuve : Soit $f \in lip_0(M)$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \leq \dfrac{\|f\|_L}{2}$ dès que $d(x, y) < \delta$. Ainsi, $\|f\|_L = \sup\limits_{\substack{x \neq y \\ d(x,y) \geq \delta}} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}$ et $\{(x, y) \in M^2;\ d(x, y) \geq \delta\}$ est un ensemble compact donc ce supremum est atteint en un couple (x_0, y_0).

Alors, $f \in \mathcal{F}(M)^*$ atteint sa norme en $\gamma = \dfrac{\delta_{x_0} - \delta_{y_0}}{d(x_0, y_0)}$:

$$\langle f, \gamma \rangle = \frac{\delta_{x_0} - \delta_{y_0}}{d(x_0, y_0)}(f) = \frac{f(x_0) - f(y_0)}{d(x_0, y_0)} = \|f\|_L.$$

□

Finalement pour montrer que l'espace Lipschitz-libre sur un ensemble compact M est un espace dual, il suffira de montrer que l'espace $lip_0(M)$ sépare uniformément les points de M (proposition 28).

Pour clore cette section sur l'espace petit-Lipschitz d'un espace métrique compact, mentionnons un résultat dû à Kalton [K1] que nous utiliserons au Chapitre 3 pour montrer que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique compact admet un prédual isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$.

Théorème 34 (Kalton, 2004)**.** *Soit (M, d) un espace métrique pointé compact. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace $lip_0(M)$ est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à un sous-espace de $c_0(\mathbb{N})$.*

Rappelons la preuve de ce théorème, en vue de l'adapter au cas des espaces métriques propres.

Définition 35. Un **réseau** d'un espace métrique (M, d) est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de M tel qu'il existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < +\infty$ pour lesquels :

· $d(x, y) \geq \varepsilon_1$ pour tout $x \neq y$ de $\mathcal{R}$,

· pour tout $x \in M$, il existe $y \in \mathcal{R}$ tel que $d(x, y) \leq \varepsilon_2$.

Preuve : Supposons $\varepsilon < 1$. Munissons l'espace $M \times M$ de la distance

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit F_n un $2^{n-3}\varepsilon$-réseau du compact $\{(x_1, x_2) \in M \times M : 2^n \leq d(x_1, x_2) \leq 2^{n+1}\}$. Pour n assez grand, ce réseau est vide et donc $F = \cup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ est dénombrable et nous pouvons définir $T : lip_0(M) \to c_0(F)$ par

$$Tf(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{d(x_1, x_2)}, \ f \in lip_0(M), (x_1, x_2) \in F.$$

Il est clair que $\|T\| \leq 1$. Maintenant soit $y_1 \neq y_2 \in M$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2^n \leq d(y_1, y_2) \leq 2^{n+1}$. Il existe $(x_1, x_2) \in F_n$ tel que $d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \leq 2^{n-3}\varepsilon$. Ainsi, $d(x_1, x_2) \leq 2^{n-2}\varepsilon + d(y_1, y_2)$.

Soit $f \in lip_0(M)$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{|f(y_1) - f(y_2)|}{d(y_1, y_2)} &\leq \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(y_1, y_2)} + \frac{|f(x_1) - f(y_1)| + |f(x_2) - f(y_2)|}{d(y_1, y_2)} \\
&\leq \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(y_1, y_2)} + \frac{\|f\|_L(d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2))}{d(y_1, y_2)} \\
&\leq \frac{d(x_1, x_2)}{d(y_1, y_2)} \times \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(x_1, x_2)} + \frac{\|f\|_L 2^{n-2}}{2^n} \times \varepsilon \\
&\leq \frac{2^{n-2}\varepsilon + d(y_1, y_2)}{d(y_1, y_2)} \times \|Tf\|_{c_0} + \frac{\|f\|_L}{4} \times \varepsilon \\
&\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \times \|Tf\|_{c_0} + \frac{\|f\|_L}{4} \times \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|_L \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \times \|Tf\|_{c_0} + \frac{\|f\|_L \varepsilon}{4}$$

et finalement $\|f\|_L \leq (1+\varepsilon)\|Tf\|_{c_0}$. □

Nous utiliserons ce résultat pour montrer que dans le cas des espaces ultramétriques compacts, les espaces petits-Lipschitz sont isomorphes à $c_0(\mathbb{N})$.

1.2.3 Application : $lip_0(M)$ comme prédual

Rappelons que pour montrer que l'espace Lispchitz-libre sur un espace métrique compact M est le dual de $lip_0(M)$, il suffira de montrer que ce dernier espace sépare uniformément les points de M.

L'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique compact dénombrable est un espace dual

Définissons la dérivation de Cantor-Bendixon :
Soit (M, d) un espace métrique. Notons :
- M' l'ensemble des points d'accumulation de M,
- $M^{(\alpha)} = (M^{(\alpha-1)})'$ pour α un ordinal successeur,
- $M^{(\alpha)} = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} M^{(\beta)}$ pour α un ordinal limite.

Un espace métrique compact (M, d) est dénombrable si et seulement s'il existe un ordinal dénombrable α tel que $M^{(\alpha)}$ soit vide.

Rappelons qu'un espace métrique M est parfait lorsque $M' = M$. En particulier pour tout ordinal α, $M^{(\alpha)} = M$.

Théorème 36. *Soit (M, d) un espace métrique pointé compact et dénombrable. Alors $\mathcal{F}(M)$ est le dual de $lip_0(M)$.*

Preuve : D'après la proposition 28, il ne reste plus qu'à montrer que $lip_0(M)$ sépare uniformément les points de M, c'est-à-dire :

$$\exists c \geq 1,\ \forall x, y \in M,\ \exists h \in lip_0(M),\ \|h\|_L \leq c,\ |h(x) - h(y)| = d(x, y).$$

Soient $x \neq y \in M$. Posons $a = d(x, y)$ et considérons B la boule fermée de centre x et de rayon $\frac{a}{2}$. Comme M est compact et dénombrable, il en est de même pour B et il existe un ordinal dénombrable α_0 tel que $B^{(\alpha_0)}$ soit fini et non vide : soient $k_1 \in \mathbb{N}^*$ et $y_1^1, \cdots, y_1^{k_1} \in M$ tels que $B^{(\alpha_0)} = \{y_1^1, \cdots, y_1^{k_1}\}$. Si on note $a_1^i = d(y_1^i, x)$ pour $1 \leq i \leq k_1$, alors il existe $r_1 \leq k_1$ et $v_1^1 < \cdots < v_1^{r_1}$ tels que $\{a_1^1, \cdots, a_1^{k_1}\} = \{v_1^1, \cdots, v_1^{r_1}\}$.

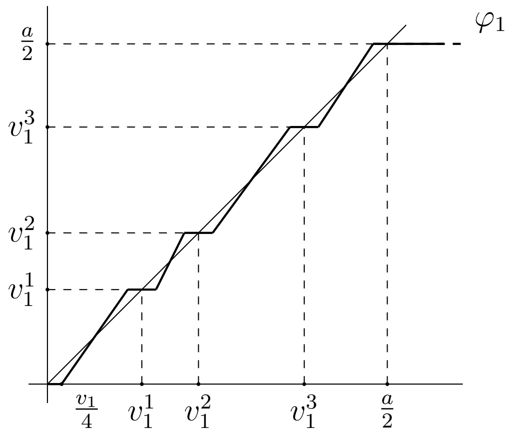
En posant

$$v_1 = \min \left(\left(\{v_1^1,\ \frac{a}{2} - v_1^{r_1}\} \backslash \{0\} \right) \cup \{v_1^i - v_1^{i-1},\ 2 \leq i \leq r_1\} \right)$$

définissons $\varphi_1 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ par

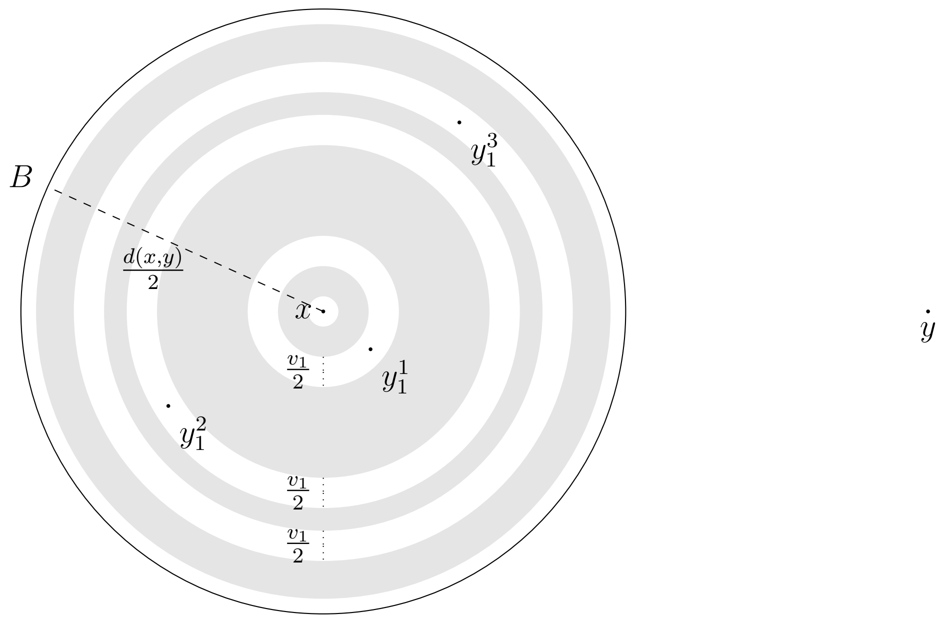
$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \in \left[0, \frac{v_1}{4}\right[:= V_1^0, \\ v_1^i & , \ t \in \left]v_1^i - \frac{v_1}{4}, v_1^i + \frac{v_1}{4}\right[:= V_1^i,\ 1 \leq i \leq r_1, \\ \frac{a}{2} & , \ t \in \left]\frac{a}{2} - \frac{v_1}{4}, +\infty\right[:= V_1^{r_1+1}, \end{cases}$$

φ_1 continue sur $[0, +\infty[$ et affine sur chacun des intervalles de $[0, +\infty[\setminus \cup_{i=0}^{r_1+1} V_1^i$:



Il n'est pas difficile de voir que la pente de φ_1 sur chacun de ces intervalles est au plus 2, et donc $\|\varphi_1\|_L \leq 2$.

Notons f la fonction distance à x et définissons $C_1 = f^{-1}\left([0,+\infty[\setminus \cup_{i=0}^{r_1+1} V_1^i\right)$ (la partie grise sur le dessin suivant) :



- Si C_1 est fini ou vide, définissons $h(\cdot) = 2\left(\varphi_1 \circ d(\,\cdot\,,x) - \varphi_1(d(0,x))\right)$. Alors $\|h\|_L \leq 4$, $|h(x)-h(y)| = d(x,y)$ et $h(0)=0$. Posons

$$\delta = \begin{cases} v_1/2, & \text{si } C_1 = \emptyset, \\ \dfrac{1}{2}\min\left(\{v_1, \mathrm{sep}(C_1)\} \cup \{\mathrm{dist}(z, M\setminus C_1),\ z \in D_1\}\right), & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$\mathrm{sep}(C_1) = \inf\{d(z,t),\ z \neq t,\ z,t \in C_1\}$$

et
$$D_1 = f^{-1}\left([0,+\infty[\setminus \cup_{i=0}^{r_1+1}\overline{V_1^i}\right).$$

Remarquons que $\delta > 0$: en effet, $v_1 > 0$ et C_1 est fini donc $\mathrm{sep}(C_1) > 0$. De plus pour tout $z \in D_1$, $\mathrm{dist}(z, M\setminus C_1) > 0$ et D_1 est fini.
Il s'ensuit que pour $z \neq t \in M$, si $d(z,t) \leq \delta$ alors z et t n'appartiennent pas à D_1 et il existe $i \leq r_1$ tel que $z, t \in f^{-1}\left(\overline{V_1^i}\right)$. Ainsi $h(z) = h(t)$, c'est-à-dire que $h \in lip_0(M)$.

- Supposons maintenant C_1 infini. Comme C_1 est un sous-ensemble de B, pour tout ordinal α, l'ensemble $C_1^{(\alpha)}$ est un sous-ensemble de $B^{(\alpha)}$. De plus C_1 a été construit de telle sorte que $C_1 \cap B^{(\alpha_0)} = \emptyset$, donc $C_1^{(\alpha_0)} = \emptyset$. Or C_1 est un ensemble compact, donc il existe un ordinal $1 \leq \alpha_1 < \alpha_0$ tel que $C_1^{(\alpha_1)}$ soit fini et non vide : soient $k_2 \in \mathbb{N}$ et $y_2^1, \cdots, y_2^{k_2} \in M$, tels que $C_1^{(\alpha_1)} = \{y_2^1, \cdots, y_2^{k_2}\}$. En notant $a_2^i = d(y_2^i, x), 1 \leq i \leq k_2$, il existe r_2 et $v_2^1 < \cdots < v_2^{r_2}$ tels que
$$\{a_2^1, \cdots, a_2^{k_2}\} = \{v_2^1, \cdots, v_2^{r_2}\}.$$

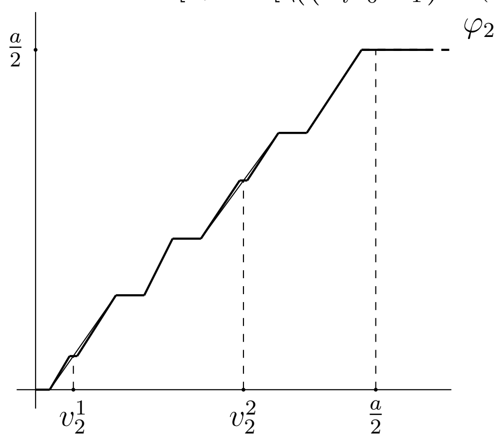
En posant

$$\begin{aligned} v_2 = \min\ & \left\{\tfrac{v_1}{4},\ v_2^1 - \tfrac{v_1}{4},\ \left(\tfrac{a}{2} - \tfrac{v_1}{4}\right) - v_2^{r_2}\right\} \cup \{v_2^i - v_2^{i-1},\ 2 \leq i \leq r_2\} \\ & \cup \left\{\left|(v_1^j - \tfrac{v_1}{4}) - v_2^i\right|,\ 1 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq r_1\right\} \\ & \cup \left\{\left|v_2^i - (v_1^j + \tfrac{v_1}{4})\right|,\ 1 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq r_1\right\}, \end{aligned}$$

définissons la fonction continue $\varphi_2 : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ par

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & ,\ t \in \displaystyle\bigcup_{i=0}^{r_1+1} V_1^i, \\ \varphi_1(v_2^i) & ,\ t \in \left]v_2^i - \frac{v_2}{2^3}, v_2^i + \frac{v_2}{2^3}\right[:= V_2^i,\ 1 \leq i \leq r_2, \end{cases}$$

et φ_2 affine sur chacun des intervalles $[0,+\infty[\setminus\left(\left(\cup_{i=0}^{r_1+1} V_1^i\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{r_2} V_2^i\right)\right)$:



La constante de Lipschitz de φ_2 est le maximum de $\|\varphi_1\|_L$ et des nouvelles pentes de φ_2. Un calcul direct donne $\|\varphi_2\|_L \leq 2 \times (1 + \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}$.
Définissons maintenant $C_2 = f^{-1}([\frac{v_1}{4}, \frac{a}{2} - \frac{v_1}{4}]\setminus((\cup_{i=1}^{r_1} V_1^i) \cup (\cup_{i=1}^{r_2} V_2^i)))$.

· Si C_2 est fini ou vide, en posant $h(\cdot) = 2\left(\varphi_2 \circ d(\ \cdot\ ,x) - \varphi_2(d(0,x))\right)$, alors $\|h\|_L \leq \frac{16}{3}$, $|h(x) - h(y)| = d(x,y)$ et $h(0) = 0$. De plus avec

$$0 < \delta = \begin{cases} v_2/4, & \text{si } C_2 = \emptyset, \\ \dfrac{1}{4}\min\left(\{v_2, \operatorname{sep}(C_2)\} \cup \{\operatorname{dist}(z, M\backslash C_2),\ \ z \in D_2\}\right), & \text{sinon}, \end{cases}$$

où

$$D_2 = f^{-1}\left([\frac{v_1}{4}, \frac{a}{2} - \frac{v_1}{4}]\backslash\left(\left(\cup_{i=1}^{r_1}\overline{V_1^i}\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{r_2}\overline{V_2^i}\right)\right)\right),$$

si $z,t \in M$ sont tels que $d(z,t) \leq \delta$, alors $h(z) = h(t)$ et nous obtenons que h appartient à $lip_0(M)$.

· Si C_2 est infini, nous procédons par récurrence jusqu'à obtenir C_n fini. Construisant une suite strictement décroissante d'ordinaux, un tel C_n apparaîtra en un nombre fini d'étapes.
La fonction h obtenue vérifiera $h(0) = 0$, $|h(x) - h(y)| = d(x,y)$ et

$$\|h\|_L \leq 2\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^j - 1}\right) \leq 2\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^j - 1}\right) := c.$$

Remarquons que la constante c ne dépend pas du choix de x et y.
Finalement, avec

$$0 < \delta = \begin{cases} v_n/2^n, & \text{si } C_n = \emptyset, \\ \dfrac{1}{2^n}\left(\min\{v_n, \operatorname{sep}(C_n)\} \cup \{\operatorname{dist}(z, M\backslash C_n),\ \ z \in D_n\}\right), & \text{sinon}, \end{cases}$$

si $z,t \in M$ sont tels que $d(z,t) \leq \delta$, alors $h(z) = h(t)$ et finalement $h \in lip_0(M)$.

En conclusion nous avons montré que pour tous $x,y \in M$ il existe une fonction $h \in lip_0(M)$ de norme inférieure à c qui sépare x et y. C'est-à-dire que $lip_0(M)$ sépare uniformément les points de M. Appliquons alors la proposition 28 pour conclure que $\mathcal{F}(M)$ est le dual de $lip_0(M)$. □

L'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique compact est un espace dual

Définition 37. Un espace métrique (M,d) est dit **ultramétrique** si d vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall x,y,z \in M, d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\}.$$

Commençons par énoncer certaines propriétés des espaces ultramétriques que nous utiliserons par la suite :

Propriétés 38.

(i) Soient $x,y \in M$ et $r > 0$. Si $y \in B(x,r)$, alors $B(y,r) = B(x,r)$. De même pour les boules fermées.

(ii) Soient $x, y, z \in M$. Si $d(x, y) < d(y, z)$, alors $d(x, z) = d(y, z)$.

(iii) Pour tout $r > 0$, il existe une partition de M en boules fermées de rayon r.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour montrer le résultat :

Théorème 39. *Soit (M, d) un espace ultramétrique pointé compact. Alors $\mathcal{F}(M)$ est le dual de $lip_0(M)$.*

Preuve : Il suffit de montrer que $lip_0(M)$ sépare uniformément les points de M.

Soit $x, y \in M$. Posons $a = \frac{d(x,y)}{2}$ et définissons $h : M \to \mathbb{R}$ par

$$h(z) = d(x, y) \left(\mathbf{1}_{B(x,a)}(z) - \mathbf{1}_{B(x,a)}(0) \right), z \in M.$$

Alors $h(0) = 0$, $|h(x) - h(y)| = d(x, y)$ et h est 2-Lipschitzienne :

· si $z, t \in B(x, a)$ ou $z, t \notin B(x, a)$, alors $h(z) = h(t)$ et

$$|h(z) - h(t)| = 0 \leq 2d(z, t).$$

· Si $z \in B(x, a)$ et $t \notin B(x, a)$, alors $B(x, a) = B(z, a)$ et donc $d(z, t) \geq a$. Ainsi,

$$|h(z) - h(t)| = d(x, y) = 2a \leq 2d(z, t).$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $h \in lip_0(M)$. Soit $\delta = a$. Remarquons tout d'abord que si $d(z, t) \leq \delta = a$, alors $z \in B(x, a)$ si et seulement si $t \in B(x, a)$. Ainsi,

$$\forall z, t \in M, d(z, t) \leq \delta \Rightarrow |h(z) - h(t)| = 0.$$

Finalement nous avons montré que h est une fonction de $lip_0(M)$, 2-Lipschitzienne et qui sépare x et y. En conclusion, $lip_0(M)$ sépare uniformément les points de M et donc, d'après la proposition 28, $\mathcal{F}(M)$ est son dual. $\square$

1.3 Cas des espaces propres

1.3.1 L'espace $S_0(M)$

Commençons par rappeler la définition d'un espace propre :

Définition 40. Un espace métrique (M, d) est dit **propre** lorsque toutes les boules fermées sont compactes.

Lorsqu'il s'agira de montrer que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique propre est un dual, les grandes lignes seront les mêmes que dans le cas compact. Au lieu de considérer l'espace $lip_0(M)$ nous en considérerons le sous-espace suivant :

$$S_0(M) = \left\{ f \in lip_0(M) \; ; \; \lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{x \text{ ou } y \notin \overline{B}(0,r) \\ x \neq y}} \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} = 0 \right\},$$

avec la convention $\sup \emptyset = 0$.

Il est clair que $S_0(M)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $Lip_0(M)$. Commençons par montrer que l'espace

$$S(M) = \left\{ f \in lip(M) \; ; \; \lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{x \text{ ou } y \notin \overline{B}(0,r) \\ x \neq y}} \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} = 0 \right\}$$

est stable par passage au maximum et au minimum et que, dans les cas des espaces propres, les fonctions de $S_0(M)$ atteignent leur norme :

Lemme 41. *Soit (M,d) un espace métrique. L'espace $S(M)$ est stable par passage au minimum et au maximum.*

Preuve : Soient $f, g \in S(M)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \neq y$ tels que x ou y ne soit pas dans $\overline{B}(0,R)$,

$$-\varepsilon \leq \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)}, \frac{g(x) - g(y)}{d(x,y)} \leq \varepsilon.$$

Soient x, y tels que x ou y n'appartienne pas à $\overline{B}(0,R)$. Supposons que $f(x) \leq g(x)$, l'autre cas se traite de la même façon.

· Si $f(y) \leq g(y)$, alors

$$\frac{\min\{f,g\}(x) - \min\{f,g\}(y)}{d(x,y)} = \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)}$$

et

$$\frac{\max\{f,g\}(x) - \max\{f,g\}(y)}{d(x,y)} = \frac{g(x) - g(y)}{d(x,y)}.$$

· Si $f(y) \geq g(y)$, alors

$$\frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} \leq \frac{\min\{f,g\}(x) - \min\{f,g\}(y)}{d(x,y)} = \frac{f(x) - g(y)}{d(x,y)} \leq \frac{g(x) - g(y)}{d(x,y)}$$

et

$$\frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} \leq \frac{\max\{f,g\}(x) - \max\{f,g\}(y)}{d(x,y)} = \frac{g(x) - f(y)}{d(x,y)} \leq \frac{g(x) - g(y)}{d(x,y)}.$$

Dans chacun des cas nous obtenons,

$$-\varepsilon \leq \frac{\min\{f,g\}(x) - \min\{f,g\}(y)}{d(x,y)}, \frac{\max\{f,g\}(x) - \max\{f,g\}(y)}{d(x,y)} \leq \varepsilon.$$

Finalement,

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{\substack{x \text{ or } y\notin \overline{B}(0,r)\\ x\neq y}} \frac{\min\{f,g\}(x)-\min\{f,g\}(y)}{d(x,y)} = 0$$

et

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{\substack{x \text{ or } y\notin \overline{B}(0,r)\\ x\neq y}} \frac{\max\{f,g\}(x)-\max\{f,g\}(y)}{d(x,y)} = 0.$$

De plus nous avons déjà vu que $lip(M)$ est stable par passage au minimum et au maximum, donc $\min\{f,g\}, \max\{f,g\} \in S(M)$. $\square$

Lemme 42. *Soit (M,d) un espace métrique pointé propre. Alors les éléments de $S_0(M)$ atteignent leur norme.*

Preuve : Soit $f \in S_0(M)$. Il existe $R > 0$ tel que

$$\sup_{\substack{x \text{ ou } y\notin \overline{B}(0,R)\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} \leq \frac{\|f\|_L}{2}.$$

De plus $f \in lip_0(M)$ donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} \leq \frac{\|f\|_L}{2}$$

dès que $d(x,y) < \delta$.

Ainsi,

$$\|f\|_L = \sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in \overline{B}(0,R)\\ d(x,y)\geq\delta}} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$$

et l'ensemble $\{(x,y) \in \overline{B}(0,R), x \neq y, d(x,y) \geq \delta\}$ est compact donc ce supremum est atteint en un couple (x_0, y_0).

Finalement, f atteint sa norme en $\gamma = \frac{\delta_{x_0}-\delta_{y_0}}{d(x_0,y_0)}$:

$$\langle f, \gamma\rangle = \frac{\delta_{x_0}-\delta_{y_0}}{d(x_0,y_0)}(f) = \frac{f(x_0)-f(y_0)}{d(x_0,y_0)} = \|f\|_L.$$

$\square$

Enfin dans le cas des espaces métriques propres, la conclusion du théorème 34 est vérifiée pour $S_0(M)$:

Lemme 43. *Soit (M,d) un espace métrique pointé propre. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace $S_0(M)$ est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à un sous-espace de $c_0(\mathbb{N})$.*

Preuve : Supposons $\varepsilon < 1$. Considérons l'espace $M \times M$ muni de la distance

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max \{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, définissons l'espace compact :

$$C_{0,k} = \left\{(x_1, x_2) \in M \times M \ ; \ d(0, x_1) \leq 1 \text{ et } \ 2^k \leq d(x_1, x_2) \leq 2^{k+1}\right\}$$

et si $j \in \mathbb{N}^*$, soit le compact

$$C_{j,k} = \left\{(x_1, x_2) \in M \times M \ ; \ 2^{j-1} \leq d(0, x_1) \leq 2^j \text{ et } \ 2^k \leq d(x_1, x_2) \leq 2^{k+1}\right\}.$$

Considérons $F_{j,k}$ un $2^{k-3}\varepsilon$-réseau fini de $C_{j,k}$. Alors l'ensemble $F := \bigcup\limits_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{Z}}} F_{j,k}$ est dénombrable.

Définissons un opérateur T, de $S_0(M)$ dans $c_0(F)$ par :

$$Tf = \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{d(x_1, x_2)}\right)_{(x_1,x_2) \in F}, f \in S(M).$$

Pour commencer justifions que T est à valeurs dans $c_0(F)$. Soit $f \in S(M)$ et $\alpha > 0$.

· La fonction f appartient à $lip_0(M)$ donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \leq -K$, si $d(x_1, x_2) \leq 2^{k+1}$, alors

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(x_1, x_2)} \leq \alpha.$$

Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $k \leq -K$, et $(x_1, x_2) \in C_{j,k}$,

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(x_1, x_2)} \leq \alpha.$$

· De plus, $\lim\limits_{r \to +\infty} \sup\limits_{\substack{x \text{ ou } y \notin \overline{B}(0,r) \\ x \neq y}} \dfrac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} = 0$, donc il existe $R > 0$ tel que pour tout $r \geq R$, $x \notin \overline{B}(0, r)$ et $y \in M$,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \leq \alpha.$$

Alors si $2^{j-1} > R$ et $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $(x_1, x_2) \in C_{j,k}$, nous avons $d(0, x_1) \geq 2^{j-1} > R$ et donc

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(x_1, x_2)} \leq \alpha.$$

Maintenant si $2^{j-1} \leq R$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $2^k > 3R$. Ainsi si $(x_1, x_2) \in C_{j,k}$, nous avons $d(0, x_2) \geq d(x_1, x_2) - d(0, x_1) \geq 2^k - 2^j > R$ et donc

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(x_1, x_2)} \leq \alpha.$$

Finalement $Tf \in c_0(F)$ pour $f \in S_0(M)$.

La norme de T est clairement inférieure à 1. Il ne reste donc plus qu'à montrer que

$$\|f\|_L \leq (1+\varepsilon)\|Tf\|_{c_0}.$$

Soient $y_1 \neq y_2 \in M$ et $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ tels que $(y_1, y_2) \in C_{j,k}$. Il existe $(x_1, x_2) \in F_{j,k}$ tel que $d'((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \leq 2^{k-3}\varepsilon$.

Soit $f \in S_0(M)$,

$$\begin{aligned}
\frac{|f(y_1) - f(y_2)|}{d(y_1, y_2)} &\leq \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(y_1, y_2)} + \frac{|f(x_1) - f(y_1)| + |f(x_2) - f(y_2)|}{d(y_1, y_2)} \\
&\leq \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(y_1, y_2)} + \frac{\|f\|_L(d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2))}{d(y_1, y_2)} \\
&\leq \frac{d(x_1, x_2)}{d(y_1, y_2)} \times \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(x_1, x_2)} + \frac{\|f\|_L 2^{k-2}}{2^k} \times \varepsilon \\
&\leq \frac{2^{k-2}\varepsilon + d(y_1, y_2)}{d(y_1, y_2)} \times \|Tf\|_{c_0} + \frac{\|f\|_L}{4} \times \varepsilon \\
&\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \times \|Tf\|_{c_0} + \frac{\|f\|_L}{4} \times \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi $\|Tf\|_{c_0} \leq \|f\|_L \leq (1+\varepsilon)\|Tf\|_{c_0}$ et donc $S_0(M)$ est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à un sous-espace de $c_0(\mathbb{N})$. □

Tout comme dans le cas des espaces compacts, nous utiliserons ce résultat pour montrer que si M est un espace ultramétrique propre, alors $S_0(M)$ est isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$ lui-même.

1.3.2 Application : $S_0(M)$ comme prédual

L'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique propre dénombrable est un dual

Théorème 44. *Soit (M, d) un espace métrique pointé propre et dénombrable. Alors $\mathcal{F}(M)$ est isométrique au dual de $S_0(M)$.*

Preuve : Pour pouvoir utiliser la proposition 28, montrons que $S_0(M)$ sépare uniformément les points de M.

Soient $x, y \in M$. L'idée de la construction de la fonction h qui sépare x et y est la même que dans le cas où M est compact : définir une fonction constante autour des points d'accumulation. Cependant pour que cette fonction h appartienne à $S_0(M)$, nous allons la définir pour qu'elle s'annule en dehors d'une certaine boule.

Posons $a = d(x,y)$. L'espace M étant propre et dénombrable, la boule $\overline{B}\left(x, \frac{3a}{2}\right)$ est compacte et dénombrable. Il existe donc un ordinal dénombrable α_0, $k_1 \in \mathbb{N}$ et $y_1^1, \cdots, y_1^{k_1} \in M$ tels que

$$\overline{B}\left(x, \frac{3a}{2}\right)^{(\alpha_0)} = \{y_1^1, \cdots, y_1^{k_1}\}.$$

Soient alors r_1, s_1, t_1 et $u_1^1 < \cdots < u_1^{r_1} \leq \frac{a}{2} < v_1^1 < \cdots < v_1^{s_1} < a \leq w_1^1 < \cdots < w_1^{t_1} \leq \frac{3a}{2}$ tels que

$$\{d(x, y_1^i), 1 \leq i \leq k_1\} = \{u_1^1, \cdots, u_1^{r_1}, v_1^1, \cdots, v_1^{s_1}, w_1^1, \cdots, w_1^{t_1}\}.$$

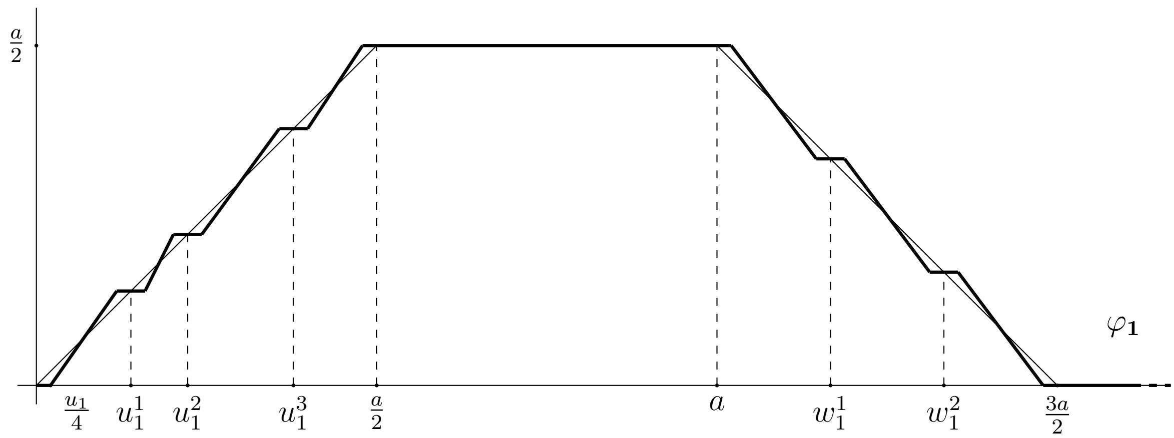
Posons

$$\begin{aligned} u_1 = \min \ & \left\{\tfrac{a}{2},\ u_1^1,\ \tfrac{a}{2} - u_1^{r_1},\ w_1^1 - a,\ \tfrac{3a}{2} - w_1^{t_1}\right\} \setminus \{0\} \\ & \cup \left\{u_1^i - u_1^{i-1},\ 2 \leq i \leq r_1\right\} \cup \left\{w_1^i - w_1^{i-1},\ 2 \leq i \leq t_1\right\} \end{aligned}$$

et définissons $\varphi_1 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ par

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \in \left[0, \frac{u_1}{4}\right[:= U_1^0, \\ u_1^i & , \ t \in \left]u_1^i - \frac{u_1}{4}, u_1^i + \frac{u_1}{4}\right[:= U_1^i, \ 1 \leq i \leq r_1, \\ \frac{a}{2} & , \ t \in \left]\frac{a}{2} - \frac{u_1}{4}, a + \frac{u_1}{4}\right[:= W_1^0, \\ \frac{3a}{2} - w_1^i & , \ t \in \left]w_1^i - \frac{u_1}{4}, w_1^i + \frac{u_1}{4}\right[:= W_1^i, \ 1 \leq i \leq t_1, \\ 0 & , \ t \in \left]\frac{3a}{2} - \frac{u_1}{4}, +\infty\right[:= W_1^{t_1+1}, \end{cases}$$

et φ_1 continue et affine sur chacun des intervalles de $[0, +\infty[\setminus \left(\left(\cup_{i=0}^{r_1} U_1^i\right) \cup \left(\cup_{i=0}^{t_1+1} W_1^i\right)\right)$:



Remarquons qu'il n'y a pas de problème de recollement car éventuellement l'intervalle W_1^0 contient $U_1^{r_1}$ et W_1^1, et l'intervalle $W_1^{t_1+1}$ contient $W_1^{t_1}$.

La constante de Lipschitz de φ_1 est inférieure à 2.

En notant $f(\cdot) = d(\cdot, x)$, posons

$$C_1 = f^{-1}\left([0, +\infty[\setminus \left(\left(\cup_{i=0}^{r_1} U_1^i\right) \cup \left(\cup_{i=0}^{t_1+1} W_1^i\right)\right)\right).$$

· Tout d'abord si C_1 est un ensemble vide ou fini, définissons

$$h(\cdot) = 2\left(\varphi_1 \circ d(\cdot, x) - \varphi_1 \circ d(0, x)\right).$$

Alors $|h(x) - h(y)| = d(x, y)$, $h(0) = 0$ et $\|h\|_L \leq 4$.
Montrons que $h \in lip_0(M)$ en posant

$$\delta = \begin{cases} u_1/2, & \text{si } C_1 = \emptyset, \\ \dfrac{1}{2}\inf\left(\{u_1, \mathrm{sep}(C_1)\} \cup \{\mathrm{dist}(z, M \backslash C_1),\ z \in D_1\}\right), & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$\mathrm{sep}(C_1) = \inf\{d(z, t),\ z \neq t,\ z, t \in C_1\}$$

et

$$D_1 = f^{-1}\left([0, +\infty) \setminus \left(\left(\cup_{i=0}^{r_1} \overline{U_1^i}\right) \cup \left(\cup_{i=0}^{t_1+1} \overline{W_1^i}\right)\right)\right).$$

Comme C_1 est fini, $\mathrm{sep}(C_1) > 0$. De plus D_1 est fini et pour $z \in D_1$, $\mathrm{dist}(z, M \backslash C_1) > 0$, ainsi $\delta > 0$.
Si z et t sont tels que $d(z, t) \leq \delta$, ils n'appartiennent donc pas à D_1 et il existe soit $0 \leq i \leq r_1$ tel que $z, t \in f^{-1}\left(\overline{U_1^i}\right)$, soit $0 \leq i \leq t_1 + 1$ tel que $z, t \in f^{-1}\left(\overline{W_1^i}\right)$, donc $h(z) = h(t)$. Ainsi $h \in lip_0(M)$.

Finalement il ne reste plus qu'à montrer que

$$\lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{x \text{ ou } y \notin \overline{B}(0,r) \\ x \neq y}} \frac{h(x) - h(y)}{d(x, y)} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tel que $0 < \dfrac{d(x, y)}{r - 3a/2 - d(0, x)} \leq \varepsilon$.
Si $z \notin \overline{B}(0, r)$ et $t \notin \overline{B}(x, \frac{3a}{2})$, alors $\dfrac{h(z) - h(t)}{d(z, t)} = 0$.
Maintenant si $t \in \overline{B}(x, \frac{3a}{2})$, alors $d(z, t) \geq d(z, 0) - d(0, x) - d(x, t)$ et donc

$$\frac{|h(z) - h(t)|}{d(z, t)} \leq \frac{d(x, y)}{d(z, t)} \leq \varepsilon.$$

Ainsi nous pouvons conclure que $h \in S_0(M)$.
· Supposons maintenant que l'ensemble C_1 est infini. Comme c'est un sous-ensemble de $\overline{B}\left(x, \frac{3a}{2}\right)$, l'ensemble $C_1^{(\alpha)}$ est un sous-ensemble de $\overline{B}\left(x, \frac{3a}{2}\right)^{(\alpha)}$, pour tout ordinal α. Or $C_1 \cap \overline{B}(x, \frac{3a}{2})^{(\alpha_0)} = \emptyset$ donc $C_1^{(\alpha_0)} = \emptyset$. De plus C_1 est compact et dénombrable, donc il existe $\alpha_1 < \alpha_0$ tel que $C_1^{(\alpha_1)}$ est fini et non vide.
Alors il existe $k_2 \in \mathbb{N}, y_2^1, \cdots, y_2^{k_2} \in C_1$ tels que

$$C_1^{(\alpha_1)} = \{y_2^1, \cdots, y_2^{k_2}\}$$

et $r_2, t_2 \in \mathbb{N}, u_2^1 < \cdots < u_2^{r_2} < \frac{a}{2} - \frac{u_1}{4},\ \frac{3a}{2} + \frac{u_1}{4} < w_2^1 < \cdots < w_2^{t_2}$, tels que

$$\{d(x, y_2^i)\ ;\ 1 \leq i \leq k_2\} = \{u_2^1, \cdots, u_2^{r_2}, w_2^1, \cdots, w_2^{t_2}\}.$$

Posons

$$\begin{aligned} u_2 = \min\ & \left\{\tfrac{u_1}{4}, u_2^1 - \tfrac{u_1}{4}, (\tfrac{a}{2} - \tfrac{u_1}{4}) - u_2^{r_2}, w_2^1 - (a + \tfrac{u_1}{4}), (\tfrac{3a}{2} - \tfrac{v_1}{4}) - w_2^{r_2}\right\} \\ & \cup\{u_2^i - u_2^{i-1}, 2 \leq i \leq r_2\} \cup \{w_2^i - w_2^{i-1}, 2 \leq i \leq t_2\} \\ & \cup\{\min\{|u_2^i - (u_1^j + \tfrac{u_1}{4})|, |(u_1^j - \tfrac{u_1}{4}) - u_2^i|\}, 1 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq r_1\} \\ & \cup\{\min\{|w_2^i - (w_1^j + \tfrac{u_1}{4})|, |(w_1^j - \tfrac{u_1}{4}) - w_2^i|\}, 1 \leq i \leq t_2, 1 \leq j \leq t_1\} \end{aligned}$$

et définissons $\varphi_2 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ par

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & , t \in \left(\cup_{i=0}^{r_1} U_1^i\right) \cup \left(\cup_{i=0}^{t_1+1} W_1^i\right), \\ \varphi_1(u_2^i) & , t \in \left]u_2^i - \frac{u_2}{2^3}, u_2^i + \frac{u_2}{2^3}\right[:= U_2^i,\ 1 \leq i \leq r_2, \\ \varphi_1(w_2^i) & , t \in \left]w_2^i - \frac{u_2}{2^3}, w_2^i + \frac{u_2}{2^3}\right[:= W_2^i,\ 1 \leq i \leq t_2, \end{cases}$$

et φ_2 continue sur $[0, +\infty[$ et affine sur chacun des intervalles de

$$[0, +\infty[\backslash \left(\left(\cup_{i=0}^{r_1} U_1^i\right) \cup \left(\cup_{i=0}^{t_1+1} W_1^i\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{r_2} U_1^i\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{t_2} W_1^i\right)\right).$$

Alors la constante de Lipschitz de φ_2 est inférieure à $\frac{8}{3}$. Posons

$$C_2 = C_1 \backslash f^{-1}\left(\left(\cup_{i=1}^{r_2} U_1^i\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{t_2} W_1^i\right)\right).$$

- Si l'ensemble C_2 est vide ou fini, la fonction $h(\cdot) = 2\left(\varphi_2 \circ d(\cdot, x) - \varphi_2 \circ d(0, x)\right)$ vérifie $h(0) = 0$, $|h(x) - h(y)| = d(x, y)$ et $\|h\|_L \leq \frac{16}{3}$ et avec

$$\delta = \begin{cases} u_2/4, & \text{si } C_2 = \emptyset, \\ \dfrac{1}{4}\min\left(\{u_2, \mathrm{sep}(C_2)\} \cup \{\mathrm{dist}(z, M \backslash C_2),\ z \in D_2\}\right), & \text{sinon,} \end{cases}$$

  où $D_2 = C_1 \backslash f^{-1}\left(\left(\cup_{i=1}^{r_2} \overline{U_1^i}\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{t_2} \overline{W_1^i}\right)\right)$, nous obtenons $\delta > 0$ et $h(z) = h(t)$ lorsque $d(z, t) \leq \delta$, c'est-à-dire que $h \in lip_0(M)$. La preuve de

$$\lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{x \text{ ou } y \notin \overline{B}(0,r) \\ x \neq y}} \frac{h(x) - h(y)}{d(x, y)} = 0$$

  est inchangée.
- Si C_2 est infini, nous procédons par récurrence jusqu'à obtenir C_n fini. La construction d'une suite strictement décroissante d'ordinaux nous assure l'existence d'un tel C_n.

La fonction h obtenue finalement vérifie $h(0) = 0$, $|h(x) - h(y)| = d(x, y)$ et

$$\|h\|_L \leq 2 \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^j - 1}\right) \leq 2 \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^j - 1}\right) := c$$

où c est bien une constante indépendante de x et y. De plus, avec

$$\delta = \begin{cases} u_n/2^n, & \text{si } C_n = \emptyset, \\ \dfrac{1}{2^n}\left(\min\{u_n, \operatorname{sep}(C_n)\} \cup \{\operatorname{dist}(z, M\backslash C_n),\ z \in D_n\}\right), & \text{sinon,} \end{cases}$$

nous obtenons $\delta > 0$ et si $d(z,t) \leq \delta$, alors $h(z) = h(t)$, i.e. $h \in lip_0(M)$. Finalement, la fonction h vérifie toujours

$$\lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{x \text{ ou } y \notin \overline{B}(0,r) \\ x \neq y}} \frac{h(x) - h(y)}{d(x,y)} = 0.$$

Nous pouvons donc conclure que $S_0(M)$ sépare uniformément les points de M, et donc, d'après la proposition 28, $\mathcal{F}(M)$ en est un dual. $\square$

L'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique propre est un dual

Théorème 45. *Soit (M,d) un espace ultramétrique pointé propre. Alors $\mathcal{F}(M)$ est le dual de $S_0(M)$.*

Preuve : Soient x et y dans M. Nous allons montrer que la fonction h définie dans la preuve du théorème 39 appartient à $S_0(M)$.

Rappelons-en la définition. Soit $a = \frac{d(x,y)}{2}$. Définissons

$$h(\cdot) = d(x,y)\left(\mathbf{1}_{B(x,a)}(\cdot) - \mathbf{1}_{B(x,a)}(0)\right).$$

Nous savons déjà qu'elle sépare x et y, que sa constante de Lipschitz ne dépend pas de x et y et qu'elle appartient à $lip_0(M)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tel que $0 < \frac{d(x,y)}{r - d(0,x) - a} \leq \varepsilon$. Soit $z \notin \overline{B}(0,r)$.

Si $t \notin B(x,a)$, alors

$$\frac{h(z) - h(t)}{d(z,t)} = 0.$$

Maintenant si $t \in B(x,a)$, alors

$$\frac{|h(z) - h(t)|}{d(z,t)} = \frac{d(x,y)}{d(z,t)} \leq \frac{d(x,y)}{r - d(0,x) - a} \leq \varepsilon.$$

Finalement $h \in S_0(M)$, donc $S_0(M)$ sépare uniformément les points de M et $\mathcal{F}(M)$ est le dual de $S_0(M)$ (proposition 28). $\square$

1.4 Perspectives

Nous allons voir dans le chapitre suivant que la dualité des espaces Lipschitz-libres permet, lorsque ces derniers ont la propriété d'approximation, de conclure qu'ils ont la propriété d'approximation métrique.

Après s'être intéressé aux espaces compacts et aux espaces propres, l'étape naturelle suivante semble être l'étude des espaces localement compacts. Cette classe d'espaces contient les espaces métriques uniformément discrets et l'étude de leur espace Lipschitz-libre joue un rôle important dans l'étude des propriétés d'approximations.

Définition 46. Un espace métrique (M, d) est approximable s'il existe une jauge ω telle que pour tout sous-ensemble fini E de M et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi : M \to M$ uniformément continue telle que

- $d(x, \varphi(x)) < \varepsilon$, pour tout $x \in E$,
- l'image de M par φ est relativement compacte et
- $\omega_\varphi(t) := \sup\{d(\varphi(x), \varphi(y))\ ;\ d(x, y) \leq t\} \leq \omega(t)$, pour tout $t > 0$.

En particulier un espace de Banach ayant la propriété d'approximation est approximable.

Après avoir montré que si X est un espace de Banach tel que X^* est séparable, alors X et X^* sont approximables, Kalton [K2] pose la question de savoir si tous les espaces de Banach séparables sont approximables.

Dans ce même article il a montré qu'un espace de Banach séparable X est approximable si et seulement si l'espace Lipschitz-libre sur un réseau de X a la BAP (si et seulement si l'espace Lipschitz-libre sur tout réseau de X a la BAP, les réseaux étant Lipschitz-équivalents dans les espaces de Banach de dimension finie). Ainsi en montrant que pour tout espace métrique M uniformément discret, l'espace $\mathcal{F}(M)$ a la BAP, nous obtiendrions que tout espace de Banach séparable est approximable.

De plus, Kalton a montré dans [K1] que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique M uniformément discret a AP. En montrant que si M est uniformément discret et séparable, alors $\mathcal{F}(M)$ est un dual, le Théorème 15 permettrait de conclure que $\mathcal{F}(M)$ a la MAP.

Finalement mentionnons un autre problème ouvert dans l'étude des propriétés d'approximation ([C1], [K1]) : l'espace $\ell_1(\mathbb{N})$ a-t-il la MAP pour toute norme équivalente ?

Montrer qu'il existe un espace uniformément discret M tel que $\mathcal{F}(M)$ n'a pas la BAP permettrait de répondre à cette question par la négative (voir [K1], [K2]).

Chapitre 2

Propriété d'approximation métrique sur l'espace Lipschitz-libre d'un espace métrique dénombrable propre

La première section de ce chapitre permet d'introduire la “décomposition de Kalton” [K1] : ce sera le résultat central que nous utiliserons dans ce chapitre pour montrer que les espaces Lipschitz-libres considérés ont la BAP. En section 2.2 nous énoncerons la propriété des 3-espaces de Godefroy et Saphar [G-S] et construirons un contre-exemple à son utilisation “directe” pour montrer que l'espace Lipschitz-libre sur un compact dénombrable a la BAP. Les sections 2.3 et 2.4 seront dédiées aux résultats positifs.

2.1 Décomposition de Kalton

Soit (M, d) un espace métrique pointé. Considérons, pour $k \in \mathbb{Z}$, l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T_k : \mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{F}(M) \\ \delta_x & \mapsto & \begin{cases} 0, & x \notin \overline{B}(0, 2^{k+1}), \\ (k+1-\log_2 d(x,0))\delta_x, & x \in \overline{B}(0, 2^{k+1}) \backslash \overline{B}(0, 2^k), \\ (\log_2 d(x,0) - (k-1))\delta_x, & x \in \overline{B}(0, 2^k) \backslash \overline{B}(0, 2^{k-1}), \\ 0, & x \in \overline{B}(0, 2^{k-1}). \end{cases} \end{array}$$

Remarquons que si $d(x, 0) = 2^k$, alors

$$k + 1 - \log_2 d(x, 0) = \log_2 d(x, 0) - (k - 1)$$

et si $d(x, 0) = 2^{k-1}$, alors

$$\log_2 d(x, 0) - (k - 1) = 0.$$

Kalton [K1] a montré le résultat suivant :

Proposition 47 (Kalton). *Si $\gamma \in \mathcal{F}(M)$, alors $\gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_k\gamma$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_k\gamma\|_{\mathcal{F}(M)} \leq 72\|\gamma\|_{\mathcal{F}(M)}$. En particulier la convergence de $\sum_{k\in\mathbb{Z}} T_k\gamma$ est inconditionnelle.*

Nous l'utiliserons comme suit :
Pour (M,d) espace métrique pointé et $N \in \mathbb{N}$, notons $A_N = \{0\} \cup (\overline{B}(0, 2^{N+1}) \backslash B(0, 2^{-N-1}))$. D'après ce qui précède, il existe une suite d'opérateurs

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} T_k : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(A_N)$$

de normes inférieures à 72, qui converge fortement vers l'identité.

Exemple 48. Si M est une suite convergeant vers 0, alors 0 est le seul point d'accumulation et pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_N est fini. Ainsi l'opérateur S_N est de rang fini et $\mathcal{F}(M)$ a la 72-BAP.

2.2 Remarque sur la propriété des trois espaces de Godefroy-Saphar

Commençons par énoncer le résultat de Godefroy et Saphar [G-S].

Théorème 49 (Godefroy, Saphar). *Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Banach X tel que $F^\perp$ soit complémenté dans X^* et X/F ait la propriété d'approximation bornée. Alors X a la propriété d'approximation bornée si et seulement si F l'a.*

Soit (M,d) un espace métrique pointé et A un sous-ensemble fermé de M contenant 0. Définissons le quotient M/A comme l'espace $(M\backslash A) \cup \{0\}$ muni de la distance :

$$d_{M/A}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{dist}(x,A), & y = 0, \\ \min\{d(x,y),\ \mathrm{dist}(x,A) + \mathrm{dist}(y,A)\}, & x, y \neq 0. \end{cases}$$

Montrons que l'espace Lipschitz-libre d'un quotient est le quotient des espaces Lipschitz-libres (voir Propositions 1.4.3 et 1.4.4 dans [W]) :

Lemme 50. *Soit (M,d) un espace métrique pointé et A un sous-ensemble fermé de M. Alors $\mathcal{F}(M/A)$ est linéairement isométrique à $\mathcal{F}(M)/\mathcal{F}(A)$.*

En particulier si $\alpha < \omega_1$, alors l'espace $\mathcal{F}(M)/\mathcal{F}(M^{(\alpha)})$ est linéairement isométrique à $\mathcal{F}(M/M^{(\alpha)})$.

Preuve : Supposons sans perte de généralité que $0 \in A$. Alors,

$$\{f \in Lip_0(M)\ ;\ \forall x,y \in A, f(x) = f(y)\} = \{f \in Lip_0(M)\ ;\ \forall x \in A, f(x) = 0\}.$$

Et puisque $\mathcal{F}(A) = \overline{\text{vect}}\ \{\delta_x,\ x \in A\}$,

$$\{f \in Lip_0(M)\ ;\ \forall x \in A, f(x) = 0\} = \mathcal{F}(A)^{\perp},$$

ce dernier espace étant linéairement isométrique à $(\mathcal{F}(M)/\mathcal{F}(A))^*$. En résumé :

$$\{f \in Lip_0(M)\ ;\ \forall x, y \in A, f(x) = f(y)\} \equiv (\mathcal{F}(M)/\mathcal{F}(A))^*,$$

cette isométrie étant $w^* - w^*$-continue.

Soit $\Phi : \{f \in Lip_0(M) ; \forall x, y \in A, f(x) = f(y)\} \to Lip_0(M/A)$, définie par $\Phi(f)(x) = f(x)$, $x \in M/A$, $f \in \{f \in Lip_0(M)\ ;\ \forall x, y \in A, f(x) = f(y)\}$. Cette application est une isométrie surjective, donc nous obtenons

$$\mathcal{F}(M/A)^* \equiv \{f \in Lip_0(M)\ ;\ \forall x, y \in A, f(x) = f(y)\} \equiv (\mathcal{F}(M)/\mathcal{F}(A))^*.$$

Finalement, Φ est également $w^* - w^*$-continue et nous pouvons conclure que

$$\mathcal{F}(M)/\mathcal{F}(A) \equiv \mathcal{F}(M/A).$$

□

Nous avons déjà mentionné dans l'exemple 48 que si $M' = \{0\}$, alors $\mathcal{F}(M)$ a la BAP. Ainsi, nous aimerions montrer que si $M^{(2)} = \{0\}$, alors $\mathcal{F}(M')^{\perp}$ est complémenté dans $Lip_0(M)$. En effet, dans ce cas nous obtiendrions que :

· $\mathcal{F}(M')$ a la BAP,
· $(M/M')' = \{0\}$ donc $\mathcal{F}(M/M') \equiv \mathcal{F}(M)/\mathcal{F}(M')$ a la BAP,
· et $\mathcal{F}(M')^{\perp}$ est complémenté dans $Lip_0(M)$.

Grâce au Théorème 49 de Godefroy et Saphar, nous pourrions conclure que lorsque $M^{(2)} = \{0\}$, $\mathcal{F}(M)$ a la BAP. Finalement, nous pourrions espérer procéder par récurrence pour obtenir que si $M^{(\alpha)} = \{0\}$ pour α dénombrable, alors $\mathcal{F}(M)$ a la BAP.

Cependant,

Proposition 51. *Il existe un espace métrique compact K tel que $K^{(2)} = \{0\}$ et $\mathcal{F}(K')^{\perp}$ n'est pas complémenté dans $Lip_0(K)$.*

La preuve de cette proposition repose sur le résultat suivant, inspiré de la Proposition 7 dans [G-O] :

Proposition 52. *Pour tout $\lambda > 0$, il existe un espace métrique fini H_λ et un sous-ensemble G_λ de H_λ tels que si $P : Lip_0(H_\lambda) \to \mathcal{F}(G_\lambda)^{\perp}$ est une projection linéaire continue, alors $\|P\| \geq \lambda$.*

Preuve : Procédons par l'absurde en supposant qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout espace métrique fini H et tout $G \subset H$, il soit possible de construire une projection linéaire de $Lip_0(H)$ dans $\mathcal{F}(G)^{\perp}$ de norme inférieure à λ_0.

Soit K un espace métrique compact tel que $\mathcal{F}(K)$ n'a pas AP (un tel K existe par le Corollaire 5 de [G-O]). Il existe une suite croissante $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de K

d'union dense dans K. D'après l'hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq n$, il existe une projection linéaire $P_n^k : Lip_0(G_k) \to \mathcal{F}(G_n)^\perp$ de norme inférieure à λ_0, où $\mathcal{F}(G_n)^\perp \subset Lip_0(G_k)$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ soit $E_k : Lip_0(G_k) \to Lip_0(K)$ l'opérateur d'extension (non linéaire) donné par l'inf-convolution : pour $f \in Lip_0(G_k)$ et $x \in K$,

$$E_k f(x) = \inf_{y \in G_k} \{f(y) + \|f\|_L d(x,y)\}.$$

Rappelons que cet opérateur préserve la constante de Lipschitz.

Définissons un opérateur $\widetilde{P_n^k}$ sur $Lip_0(K)$: pour $f \in Lip_0(K)$,

$$\widetilde{P_n^k}(f) = \begin{cases} E_k P_n^k\left(f_{|G_k}\right), & k \geq n, \\ 0, & k < n. \end{cases}$$

Alors pour $f \in Lip_0(K)$, $\|\widetilde{P_n^k}(f)\|_L \leq \lambda_0 \|f\|_L$.

Soit maintenant $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. Alors pour toute fonction f de $Lip_0(K)$, définissons $P_n f = w^* - \lim_{k \in \mathcal{U}} \widetilde{P_n^k}(f)$. Pour chaque $x \in K$, $x \in G_k$ à partir d'un certain rang donc, à partir d'un certain rang, $E_k P_n^k\left(f_{|G_k}\right) = P_n^k\left(f_{|G_k}\right)$ et P_n est linéaire. Ainsi, P_n est une projection linéaire sur $\mathcal{F}(G_n)^\perp \subset Lip_0(K)$ car P_n^k est une projection sur $\mathcal{F}(G_n)^\perp \subset Lip_0(G_k)$. De plus, pour tout $f \in Lip_0(K)$, la suite $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 et $\|P_n f\|_L \leq \lambda_0 \|f\|_L$.

Finalement posons $Q_n = Id_{Lip_0(K)} - P_n : Lip_0(K) \to Lip_0(K)$. Alors Q_n est une projection linéaire continue de rang fini. De plus $\|Q_n\| \leq 1 + \lambda_0$ et pour tout $f \in Lip_0(K)$, la suite $(Q_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est $w^* - w^*$-continue. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $Lip_0(K)$ qui converge préfaiblement vers $f \in Lip_0(K)$. En particulier cette suite est bornée et, comme Q_n est continue, la suite $(Q_n(f_j))_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée. De plus, Q_n est de rang fini donc il existe une sous-suite $(Q_n(f_{j_p}))_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge en norme vers $g \in Lip_0(K)$. Finalement, comme Q_n est une projection et Ker Q_n est préfaiblement fermé, $g = Q_n(f)$ et Q_n est $w^* - w^*$-continue.

En conclusion il existe une suite d'opérateurs R_n sur $\mathcal{F}(K)$ admettant Q_n pour adjoint. Alors les R_n sont de rang fini, de normes uniformément bornées et $(R_n\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers γ, pour tout $\gamma \in \mathcal{F}(K)$. Le Lemme 19 permet de conclure que $\mathcal{F}(K)$ a la BAP, ce qui contredit le fait que $\mathcal{F}(K)$ n'a pas AP. $\square$

Finalement, passons à la construction du compact K de la Proposition 51 :

Preuve de la Proposition 51 : D'après la Proposition 52, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un espace métrique fini H_n et $G_n \subset H_n$ tels que toute projection linéaire continue de $Lip_0(H_n)$ dans $\mathcal{F}(G_n)^\perp$ soit de norme supérieure à n. Le plongement de Fréchet permet de voir H_n comme sous-espace de $\ell_\infty^{\#H_n}$. Ceci donne un espace ambiant dans lequel travailler.

Posons

$$\alpha_n = \min\{d(x,y),\ x \neq y \in H_n\} > 0.$$

Pour tout $g \in G_n$, soit L_n^g une suite dans $\ell_\infty^{\# H_n}$, non stationnaire, qui converge vers g et qui est contenue dans $B\left(g, \frac{\alpha_n}{2}\right)$. Définissons

$$K_n = \left(\bigcup_{g \in G_n} L_n^g \right) \cup H_n,$$

alors $G_n \subset H_n \subset K_n$ et $K_n' = G_n$. Supposons que le diamètre de K_n est inférieur à 8^{-n}.

Enfin, définissons

$$K := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times K_n \right) \cup \{0\}$$

et munissons cet ensemble de la distance suivante :

$$\begin{aligned} d(0,(n,x)) &= 2^{-n}, \\ d((n,x),(m,y)) &= \begin{cases} d_{K_n}(x,y), & n = m, \\ |2^{-n} - 2^{-m}|, & n \neq m. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme prévu nous obtenons $K^{(2)} = \{0\}$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{F}(K')^\perp$ n'est pas complémenté dans $Lip_0(K)$. Supposons qu'il existe une projection linéaire continue $P : Lip_0(K) \longrightarrow \mathcal{F}(K')^\perp$.

Définissons les opérateurs $E_n : Lip_0(H_n) \longrightarrow Lip_0(K_n)$, $F_n : Lip_0(H_n) \longrightarrow Lip_0(K)$ et $R_n : Lip_0(K) \longrightarrow Lip_0(H_n)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \forall f \in Lip_0(H_n), \qquad (E_n f)(x) &= \begin{cases} f(x), & x \in H_n, \\ f(g), & x \in L_n^g, \end{cases} \\ \forall f \in Lip_0(H_n), \quad (F_n f)(m,x) &= \begin{cases} (E_n f)(x), & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \\ \forall f \in Lip_0(K), \qquad\qquad R_n f &= f_{|\{n\} \times H_n}(n, \cdot). \end{aligned}$$

Finalement

$$P_n := R_n \circ P \circ F_n : Lip_0(H_n) \longrightarrow \mathcal{F}(G_n)^\perp$$

est une projection linéaire continue. De l'hypothèse faite sur H_n et G_n nous déduisons que $\|P_n\| \geq n$. De plus $\|F_n\| \leq 2$, par le choix de α_n.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la norme de P est supérieure à $n/3$, ce qui contredit le fait que cette projection est continue. Ainsi, $\mathcal{F}(K')^\perp$ n'est pas complémenté dans $Lip_0(K)$. $\square$

2.3 Propriété d'approximation métrique de l'espace Lipschitz-libre d'un espace compact dénombrable

Pour montrer que l'espace Lipschitz-libre sur un espace compact dénombrable a la MAP nous allons effectuer une récurrence transfinie qui utilisera le résultat classique suivant :

Lemme 53. *Soit (M,d) un espace métrique compact. Supposons qu'il existe α un ordinal dénombrable et des sous-ensembles $F_1,\dots,F_n$ de $M^{(\alpha)}$ qui soient ouverts-fermés, mutuellement disjoints et tels que $M^{(\alpha)} = F_1 \cup \dots \cup F_n$. Alors il existe $G_1,\cdots,G_n$ des ouverts-fermés de M mutuellement disjoints tels que $M = G_1 \cup \dots \cup G_n$ et $G_i^{(\alpha)} = F_i$.*

Preuve : Procédons par récurrence sur $\alpha < \omega_1$ tel que $M^{(\alpha)} = F_1 \cup \dots \cup F_n$, avec F_i ouvert-fermé et $F_i \cap F_j = \emptyset$, pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$.

· Si $\alpha = 0$ il suffit de choisir $G_i = F_i$, $1 \leq i \leq n$.

· Supposons que le résultat soit vérifié pour $\alpha < \omega_1$. Soit $\{F_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partition en ouverts-fermés de $M^{(\alpha+1)}$.
Chaque F_i est fermé dans $M^{(\alpha)}$ qui est compact donc il existe des ouverts O_i de $M^{(\alpha)}$ tel que $F_i \subset O_i$ et $O_i \cap O_j = \emptyset$, pour $i \neq j$, et donc $O_i' = F_i$. Posons $O = M^{(\alpha)} \setminus \cup_{i=1}^n O_i$, $U_1 = O_1 \cup O$ et $U_i = O_i$, pour $2 \leq i \leq n$. Alors $M^{(\alpha)} = \cup_{i=1}^n U_i$, $U_i' = F_i$ et chaque U_i est ouvert-fermé dans $M^{(\alpha)}$: en effet $U_i = O_i$ est un ouvert de $M^{(\alpha)}$ pour $i \geq 2$. De plus les points de O sont isolés dans $M^{(\alpha)}$ donc O, et par conséquent U_1, est ouvert dans $M^{(\alpha)}$. Finalement, comme $M^{(\alpha)}$ est égal à la réunion disjointe des U_i, chacun de ces ensembles est fermé.
Appliquons l'hypothèse de récurrence pour obtenir $G_1,\cdots,G_n$ des ouverts-fermés de M mutuellement disjoints tels que $M = G_1 \cup \dots \cup G_n$ et $G_i^{(\alpha)} = U_i$. En particulier nous avons $G_i^{(\alpha+1)} = F_i$, $1 \leq i \leq n$.

· Pour terminer soit α un ordinal limite et $M^{(\alpha)} = F_1 \cup \dots \cup F_n$ une union disjointe d'ouverts-fermés. Il existe $O_1,\cdots,O_n$ des ouverts de M tels que $F_i \subset O_i$, $O_i^{(\alpha)} = F_i$ et $O_i \cap O_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
Posons $F = M \setminus \cup_{i=1}^n O_i$, alors $\bigcap_{\beta<\alpha} F \cap M^{(\beta)} = F \cap M^{(\alpha)} = \emptyset$. Or F est compact, donc il existe $\beta < \alpha$ tel que $F \cap M^{(\beta)} = \emptyset$, c'est-à-dire $M^{(\beta)} \subset \cup_{i=1}^n O_i$. De plus $M^{(\beta)}$ est l'union disjointe des $O_i \cap M^{(\beta)}$, $1 \leq i \leq n$, qui sont des ouverts-fermés de $M^{(\beta)}$. D'après l'hypothèse de récurrence : $M = G_1 \cup \dots \cup G_n$, où les G_i sont des ouverts-fermés de M mutuellement disjoints tels que $G_i^{(\beta)} = O_i \cap M^{(\beta)} = O_i^{(\beta)}$. Pour conclure, $\beta < \alpha$ donc $G_i^{(\alpha)} = \bigcap_{\gamma<\alpha} G_i^{(\gamma)} = \bigcap_{\gamma<\alpha} O_i^{(\gamma)} = O_i^{(\alpha)} = F_i$.

□

En combinant le fait que l'espace Lipschitz-libre sur un compact dénombrable est un dual avec le théorème de Grothendieck (Théorème 15), la décomposition de Kalton nous permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 54. *L'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique pointé compact et dénombrable a la propriété d'approximation métrique.*

Preuve : Procédons par récurrence sur α ordinal dénombrable tel que $M^{(\alpha)}$ soit fini.

· Si M est fini alors $\mathcal{F}(M)$ est de dimension finie. Cet espace a donc trivialement la MAP : le résultat est vérifié pour $\alpha = 0$.

· Soit α un ordinal dénombrable. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, si N est un espace métrique compact tel que $N^{(\beta)}$ est fini, alors $\mathcal{F}(N)$ a la MAP.

Soit (M,d) un espace métrique compact tel que $M^{(\alpha)}$ est fini. D'après le Théorème 36, $\mathcal{F}(M)$ est un espace dual. De plus il est séparable donc, d'après le Théorème 15, il suffit de montrer que $\mathcal{F}(M)$ a la BAP.
Notons $M^{(\alpha)} = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Les singletons $\{a_i\}$, $1 \leq i \leq n$, sont des ouverts-fermés de $M^{(\alpha)}$. D'après le Lemme 53 il existe $G_1, \cdots, G_n$ des sous-ensembles ouverts-fermés de M mutuellement disjoints tels que $M = G_1 \cup \cdots \cup G_n$ et $G_i^{(\alpha)} = \{a_i\}$, $i \leq n$.
En notant $M_i = G_i \cup \{0\}$, $1 \leq i \leq n$, l'espace $\mathcal{F}(M)$ est isomorphe à $(\oplus_{i=1}^n \mathcal{F}(M_i))_{\ell_1}$. En effet, l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} \Phi : Lip_0(M) & \to & (\oplus_{i=1}^n Lip_0(M_i))_\infty \\ f & \mapsto & \left(f_{|M_i}\right)_{i=1}^n \end{array}$$

est surjectif et préfaiblement continu. De plus si

$$a = \min_{i \neq j} \inf \{d(x,y),\ x \in G_i,\ y \in G_j\},$$

alors $a > 0$ par compacité de M et pour $f \in Lip_0(M)$,

$$\frac{a}{2\ \mathrm{diam}(M)} \|f\|_L \leq \|\Phi(f)\|_\infty \leq \|f\|_L.$$

Donc Φ est un isomorphisme et ainsi $\mathcal{F}(M)$ est isomorphe à $(\oplus_{i=1}^n \mathcal{F}(M_i))_{\ell_1}$.
La BAP étant stable par isomorphisme, il suffit de montrer que $(\oplus_{i=1}^n \mathcal{F}(M_i))_{\ell_1}$ a cette propriété. De plus si chacun des espaces $\mathcal{F}(M_i)$ a la BAP, leur somme ℓ_1 l'aura car c'est une somme finie. Nous allons donc montrer que lorsque $M^{(\alpha)}$ est un singleton, $\mathcal{F}(M)$ a la BAP.
Supposons $M^{(\alpha)} = \{0\}$ sans perte de généralité. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\beta < \alpha$ tel que $A_N^{(\beta)}$ est fini et donc par hypothèse $\mathcal{F}(A_N)$ a la MAP, où

$$A_N = \{0\} \cup (\overline{B}(0, 2^{N+1}) \backslash B(0, 2^{-N-1})).$$

La réunion des $\mathcal{F}(A_N)$ étant dense dans $\mathcal{F}(M)$, d'après le Théorème 18 il suffit de trouver une suite d'opérateurs linéaires S_N de $\mathcal{F}(M)$ dans $\mathcal{F}(A_N)$ de normes uniformément bornées et qui converge ponctuellement vers l'identité. Cette suite est donnée par la décomposition de Kalton : il existe $S_N : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(A_N)$ tel que $\|S_N\| \leq 72$ et $\lim_{N \to +\infty} S_N \gamma = \gamma$, pour tout $\gamma \in \mathcal{F}(M)$.
Ainsi $\mathcal{F}(M)$ a la BAP et il est possible de conclure grâce aux réductions faites en début de preuve.

□

Corollaire 55. *Soit (M,d) un espace métrique compact. Alors pour tout ordinal dénombrable α tel que $M/M^{(\alpha)} \neq \emptyset$, l'espace $\mathcal{F}(M/M^{(\alpha)})$ a la propriété d'approximation métrique.*

Preuve : Soit M un espace métrique compact et α un ordinal dénombrable. Alors $\left(M/M^{(\alpha)}\right)^{(\alpha)}$ est vide ou réduit à $\{0\}$ et donc $M/M^{(\alpha)}$ est un compact dénombrable. D'après le Théorème 54 son espace Lipschitz-libre a la MAP. □

2.4 Propriété d'approximation métrique de l'espace Lipschitz-libre d'un espace propre dénombrable

Les boules fermées d'un espace propre étant compactes, en combinant le Théorème 54 à la décomposition de Kalton nous allons obtenir que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique propre dénombrable a la 72-BAP. De plus nous avons montré dans le Chapitre 1 que ce dernier espace est un dual, nous pourrons donc appliquer le Théorème 15 pour conclure que cet espace a la MAP.

Théorème 56. *L'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique pointé propre et dénombrable a la propriété d'approximation métrique.*

Preuve : Soit M un espace métrique propre dénombrable. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$A_N = \{0\} \cup \overline{B}(0, 2^{N+1}) \backslash B(0, 2^{-N-1})$$

est donc compact et dénombrable. D'après le Théorème 54, son espace Lipschitz-libre a la MAP. Comme précédemment (preuve du Théorème 54), une combinaison du Théorème 18 et de la décomposition de Kalton permet de conclure que $\mathcal{F}(M)$ a la BAP.

En conclusion l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique propre dénombrable est un espace dual, séparable qui a la BAP, d'après le Théorème 15 cet espace a la MAP. □

2.5 Perspectives

2.5.1 Existence de décomposition fini-dimensionnelle

Après avoir montré que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique propre dénombrable a la MAP, se pose la question de l'existence d'une FDD. Une idée dans cette direction est l'étude de la propriété π.

Définition 57. Un espace de Banach X a

- la **propriété** π lorsqu'il admet une suite approximante bornée de projections.
- la **propriété d'approximation bornée commutative** (CBAP) lorsqu'il admet une suite approximante commutative.

  Lorsque la norme de ces opérateurs est bornée par 1, nous parlerons de propriété d'approximation métrique commutative (CMAP).

Il a été montré par Casazza [C2] et Casazza et Kalton [C-K] qu'un espace de Banach séparable ayant la MAP et la propriété π admet une FDD :

Théorème 58 (Casazza)**.** *Un espace de Banach ayant la propriété d'approximation bornée commutative et la propriété* π *admet une décomposition fini-dimensionnelle.*

Théorème 59 (Casazza, Kalton)**.** *Si un espace de Banach séparable a la propriété d'approximation métrique, alors il a la propriété d'approximation métrique commutative.*

La suite approximante $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ donnée dans la décomposition de Kalton n'est pas une suite de projections donc ne permet pas de conclure que l'espace Lipschitz-libre d'un espace tel que $M' = \{0\}$ a la propriété π. Même si c'était le cas, nous obtiendrions la propriété π avec une constante 72, ce qui, comme dans le cas de la BAP, ne nous permettrait pas de passer aux compacts d'ordre infini. En effet, il n'existe pas de résultat du type Théorème 15 pour la propriété π.

2.5.2 Existence de compact M tel que $lip_0(M)$ n'a pas AP, BAP

Nous avons montré que l'espace Lipschitz-libre sur un espace métrique compact dénombrable M est le dual de $lip_0(M)$ et a la MAP. Nous pouvons donc en déduire que dans ce cas, l'espace $lip_0(M)$ a la MAP [Gr] (voir aussi [C1]).

D'une manière plus générale il est naturel de se demander quels sont les espaces métriques M pour lesquels l'espace $lip_0(M)$ a/n'a pas la MAP/BAP/AP. En particulier existe-t-il un espace métrique pour lequel lip_0 n'a pas AP ? Qu'en est-il du compact K tel que $\mathcal{F}(K)$ n'a pas AP construit par Godefroy et Ozawa [G-O] ? Existe-t-il un espace métrique M tel que $\mathcal{F}(M)$ ait AP/MAP, mais pas $lip_0(M)$?

2.5.3 Compacts totalement discontinus

En utilisant le raisonnement présenté plus haut, à savoir en montrant que $\mathcal{F}(M)$ a la BAP puis que c'est le dual de $lip_0(M)$, Godefroy et Ozawa [G-O] prouvent le théorème suivant :

Proposition 60 (Godefroy, Ozawa)**.** *Soit (M, d) un espace métrique pointé compact. Supposons qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs qui tend vers 0, un réel $\rho < \frac{1}{2}$ et une suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de M finis, ε_n-séparés et $\rho\varepsilon_n$-denses dans M. Alors $\mathcal{F}(M)$ a la propriété d'approximation métrique.*

Qu'en est-il de l'espace Lipschitz-libre sur un espace compact totalement discontinu en général ? Est-ce un espace dual ? A-t-il la MAP ?

Nous avons déjà vu que dans le cas particulier des espaces compacts ultramétriques, l'espace Lipschitz-libre est un espace dual. Nous allons montrer qu'il a la MAP.

Chapitre 3

Sur l'espace Lipschitz-libre des espaces ultramétriques

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'espace Lipschitz-libre des espaces ultramétriques. Nous montrerons dans un premier temps que lorsque l'espace ultramétrique considéré est propre, son espace Lipschitz-libre a la MAP. Dans une deuxième section, nous verrons qu'il est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$. Ces deux résultats ont été généralisés par Cúth et Doucha [C-D].

Nous savons que si M est un espace ultramétrique propre, alors $\mathcal{F}(M)$ est un dual. En combinant ce résultat avec le précédent, nous montrerons que cet espace Lipschitz-libre a un prédual isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$. Dans le cas particulier où M est un espace compact ultramétrique, c'est l'espace $lip_0(M)$ qui est isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$.

Nous montrerons ensuite que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique M n'est jamais isométrique à un espace ℓ_1 en étudiant les points extrémaux de la boule unité de $Lip_0(M)$.

Pour finir nous nous intéresserons aux points extrémaux de la boule unité de l'espace Lipschitz-libre sur des sous-ensembles d'arbre réel.

3.1 Propriété d'approximation métrique

Théorème 61. *L'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique pointé propre a la propriété d'approximation métrique.*

Preuve : Soit (M, d) un espace ultramétrique propre.

Construisons une suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs adjoints sur $Lip_0(M)$, de norme 1 et telle que pour tout $f \in Lip_0(M)$, la suite $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme M est ultramétrique, en particulier $\overline{B}(0, n)$ est ultramétrique et d'après la Propriété 38(iii), il en existe une partition en boules fermées de rayon $1/n$. De plus M est un espace propre, donc $\overline{B}(0, n)$ est compact et il existe $x_1^n, \cdots, x_{k_n}^n \in M$ tels que $\{\overline{B}\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right)\}_{i=1}^{k_n}$ soit une partition finie de $\overline{B}(0, n)$. Définissons $L_n : Lip_0(M) \to Lip_0(M)$ comme suit : pour

$f \in Lip_0(M)$,

$$\begin{array}{rcl} L_n(f) : M & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x_i^n), & \text{lorsque } \ x \in \overline{B}\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right), 1 \leq i \leq k_n, \\ 0, & x \notin \overline{B}\left(0, n\right). \end{cases} \end{array}$$

1. Calculons la norme de L_n. Soient $f \in Lip_0(M)$ et $x, y \in M$.
   · S'il existe $i \in \{1, \ldots, k_n\}$ tel que $x, y \in \overline{B}\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right)$, alors
   $$|L_n(f)(x) - L_n(f)(y)| = 0 \leq \|f\|_L d(x, y).$$
   · Si $x \in \overline{B}\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right)$ et $y \in \overline{B}\left(x_j^n, \frac{1}{n}\right)$ avec $i \neq j$, alors $\overline{B}\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right) = \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ par ultramétricité et donc $d(x, y) > \frac{1}{n}$. Ainsi,
   $$\begin{aligned} |L_n(f)(x) - L_n(f)(y)| &= |f(x_i^n) - f(x_j^n)| \leq \|f\|_L d(x_i^n, x_j^n) \\ &\leq \|f\|_L \max\{d(x_i^n, x), d(x_j^n, x)\} = \|f\|_L d(x_j^n, x) \\ &\leq \|f\|_L \max\{d(x_j^n, y), d(x, y)\} = \|f\|_L d(x, y). \end{aligned}$$
   · Enfin si $x \in \overline{B}(0, n)$ et $y \notin \overline{B}(0, n)$, alors $\overline{B}(0, n) = \overline{B}(x, n)$ et $d(x, y) > n$. Soit $i \in \{1, \cdots, k_n\}$ tel que $x \in \overline{B}\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right)$. Alors,
   $$|L_n(f)(x) - L_n(f)(y)| = |f(x_i^n)| \leq \|f\|_L d(x_i^n, 0) \leq \|f\|_L \times n < \|f\|_L d(x, y).$$

   En conclusion $\|L_n(f)\|_L \leq \|f\|_L$ et donc $\|L_n\| \leq 1$.
2. Montrons que l'opérateur L_n est $\tau_p - \tau_p$-continu. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $Lip_0(M)$ qui converge simplement vers $f \in Lip_0(M)$. Soient $\varepsilon > 0$, $x \in \overline{B}(0, n)$ et $i \in \{1, \ldots, k_n\}$ tels que $x \in \overline{B}(x_i^n, \frac{1}{n})$. Soit $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|f_p(x_i^n) - f(x_i^n)| \leq \varepsilon, \forall p \geq p_0$. Alors, pour $p \geq p_0$,
   $$|L_n f_p(x) - L_n(f)(x)| = |f_p(x_i^n) - f(x_i^n)| \leq \varepsilon.$$

   Ainsi la suite $(L_n f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $L_n f$ et l'opérateur L_n est $\tau_p - \tau_p$-continu. Nous avons mentionné que la topologie de la convergence simple sur $Lip_0(M)$ coïncide avec la topologie préfaible sur les bornés de $Lip_0(M)$. Ainsi l'opérateur L_n est l'adjoint d'un opérateur $R_n : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$.
3. Enfin nous allons voir que pour $f \in Lip_0(M)$, la suite $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Soit $x \in M$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \overline{B}(0, n)$ et $\frac{\|f\|_L}{n} \leq \varepsilon$. Soit alors $i \in \{1, \ldots, k_n\}$ tel que $x \in \overline{B}(x_i^n, \frac{1}{n})$. Alors,
   $$|L_n f(x) - f(x)| = |f(x_i^n) - f(x)| \leq \|f\|_L d(x_i^n, x) \leq \frac{\|f\|_L}{n} \leq \varepsilon.$$

   Ainsi la suite $(L_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

En conclusion nous avons montré que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs adjoints de norme 1 telle que pour tout $f \in Lip_0(M)$, la suite $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Nous en déduisons donc que $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $R_n^* = L_n$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite d'opérateurs sur $\mathcal{F}(M)$ de norme 1 telle que pour tout $\gamma \in \mathcal{F}(M)$, la suite $(R_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers γ. Finalement, nous en déduisons que $\mathcal{F}(M)$ a la MAP en utilisant le Lemme 19 (combinaisons convexes des R_n et extraction diagonale). $\square$

Ce résultat a été généralisé dans [C-D] où Cúth et Doucha ont montré le théorème suivant :

Théorème 62 (Cúth, Doucha)**.** *L'espace Lipschitz-libre sur un espace ulramétrique séparable a une base de Schauder monotone.*

Leur preuve repose sur la construction d'une suite de rétractions dans le but d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 63. *Soit (M, d) un espace métrique pointé séparable et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite injective, dense dans M et telle que $s_0 = 0$. Supposons qu'il existe une suite de rétractions $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la rétraction $r_n : M \to \{s_k, k \leq n\}$ est 1-Lipschitzienne et $r_n \circ r_{n+1} = r_n$. Alors $\mathcal{F}(M)$ a une base de Schauder monotone.*

3.2 Un prédual de l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique propre

Dans la suite nous allons voir les espaces ultramétriques comme sous-ensembles d'un arbre réel.

Définition 64. Soit (T, d) un arbre réel.

- Un **segment** $[x, y]$ est défini par $[x, y] = \phi_{x,y}([0, d(x, y)])$, $x, y \in T$.
- Un point $b \in T$ est un **point de branchement** s'il existe $x_1, x_2, x_3 \in T\backslash\{b\}$, deux à deux distincts, tels que $[x_i, b] \cap [x_j, b] = \{b\}$, $\forall i \neq j \in \{1, 2, 3\}$.
  Notons $Br(T)$ l'ensemble des points de branchement de T.

Le lien entre les arbres réels et les espaces ultramétriques a été fait par Buneman [Bu]. Il a montré qu'un espace métrique vérifiant la propriété des 4-points est contenu isométriquement dans un arbre réel.

Définition 65. Un espace métrique (M, d) vérifie la **propriété des 4-points** lorsque pour tout x, y, z, t de M, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$d(x, y) + d(z, t) \leq \max\{d(x, z) + d(y, t)\ ,\ d(x, t) + d(y, z)\}.$$

En particulier, un espace ultramétrique vérifie cette propriété et peut donc être vu comme un sous-ensemble d'un arbre réel.

De plus, il est montré dans [M] que pour tout sous-ensemble M d'un arbre T, il existe un opérateur d'extension linéaire continu de $Lip_0(M)$ dans $Lip_0(T)$, la norme de cet opérateur étant une constante indépendante de l'arbre, mais ne pouvant pas être ramenée à 1. Autrement dit $\mathcal{F}(M)$ est complémenté dans $\mathcal{F}(T)$.

Enfin, nous avons déjà vu en introduction que Godard a montré que l'espace Lipschitz-libre sur un arbre réel est isométrique à un espace L_1 (Théorème 5). En conclusion nous obtenons que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique est complémenté dans un espace L_1.

En combinant ce résultat avec ceux du Chapitre 1, nous obtenons :

Théorème 66. *L'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique pointé propre est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$ et admet un prédual isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$.*

En particulier dans le cas où M est un espace ultramétrique compact, $lip_0(M)$ est isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$.

Preuve : Soit M un espace ultramétrique propre. Nous avons déjà vu que son espace Lipschitz-libre est un dual (Théorème 45). D'après un résultat de Lewis et Stegall [L-S], un dual séparable et complémenté dans L_1 est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$. Ainsi $\mathcal{F}(M)$ est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$.

De plus, $\mathcal{F}(M)$ admet un prédual isomorphe à un sous-espace de $c_0(\mathbb{N})$ (résultats 34 et 43). Pour conclure il suffit d'appliquer le résultat de Johnson et Zippin [J-Z] suivant, à $S_0(M)$ lorsque M est propre et à $lip_0(M)$ lorsque M est compact : soit X un espace de Banach isomorphe à un sous-espace de $c_0(\mathbb{N})$ tel que X^* soit isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$. Alors X est isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$. $\square$

Cúth et Doucha [C-D] ont également partiellement généralisé ce résultat : ils ont montré que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique séparable est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$. Leur approche est évidemment différente puisque nous ne savons pas si l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique séparable non propre est un dual.

Au lieu d'utiliser le Théorème 5, ils utilisent le résultat suivant :

Théorème 67 (Godard, [G])**.** *Soit T un arbre réel séparable et A un sous-ensemble infini de T tel que $Br(T) \subset \overline{A}$. Si $\overline{A}$ ne contient pas de segment, alors $\mathcal{F}(A)$ est isométrique à $\ell_1(\mathbb{N})$.*

Pour tout espace ultramétrique séparable M, ils construisent un arbre T contenant M tel que $\overline{Br(T) \cup M}$ ne contient pas de segment et M est une rétraction Lipschitzienne de $Br(T) \cup M$.

3.3 L'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique n'est jamais isométrique à un espace ℓ_1

Au vu des résultats de la section précédente, il est naturel de se poser la question suivante : l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique (séparable) est-il isométrique à un espace ℓ_1 ?

Les résultats obtenus dans la suite du chapitre sont le fruit d'un collaboration avec Antonín Prochazká et Pedro Kaufmann [D-K-P]. Nous avons montré que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique contenant au moins trois points n'est pas isométrique à $\ell_1(\Gamma)$, quel que soit Γ.

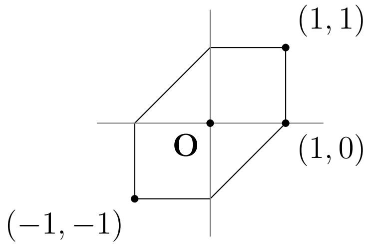
Pour prouver cela, l'idée sera de montrer que la boule unité de $Lip_0(M)$ n'est pas affinement isométrique à celle de ℓ_∞ en en étudiant les points extrémaux.

3.3.1 Cas particulier d'un espace ultramétrique à 3 points

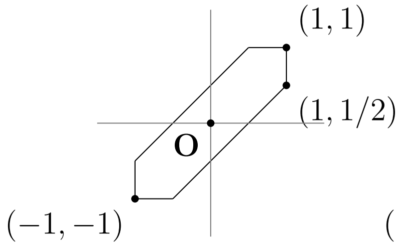
Le point de départ de cette étude a été le dessin de la boule unité de Lip_0 dans le cas où l'espace a trois points.

Dessinons cette boule unité dans quelques cas particuliers :

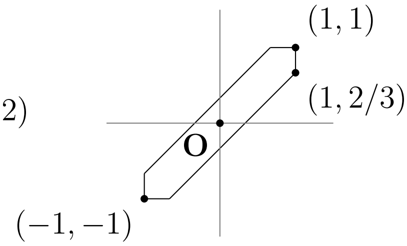
1. $M = \{0, x, y\}$ avec $d(0, x) = d(0, y) = d(x, y) = 1$.
2. $N = \{0, x, y\}$ avec $d(0, x) = d(0, y) = 1$ et $d(x, y) = 1/2$.
3. $P = \{0, x, y\}$ avec $d(0, x) = d(0, y)$ et $d(x, y) = 1/3$.



$B_{Lip_0(M)}$



$B_{Lip_0(N)}$



$B_{Lip_0(P)}$

Ces boules unité ne sont clairement pas isométriques à celle de ℓ_∞^2 puisque, par exemple, elles ont 6 points extrémaux lorsque la boule unité de ℓ_∞^2 n'en a que 4.

3.3.2 Cas général

L'énoncé suivant est valable quel que soit l'espace ultramétrique considéré, séparable ou non.

Théorème 68. *Soit (M, d) un espace ultramétrique pointé contenant au moins trois points. Alors $\mathcal{F}(M)$ n'est pas linéairement isométrique à $\ell_1(\Gamma)$, quel que soit Γ.*

Preuve : Nous allons montrer qu'il existe deux points extrémaux de la boule unité de $Lip_0(M)$ à distance strictement inférieure à 2.

Soient $x_0 = 0, x_1$ et y_0 trois points distincts de M tels que

$$d(0, x_1) \leq d(0, y_0) = d(x_1, y_0).$$

Décomposons l'espace M en trois sous-ensembles :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in M \ ; \ d(x, y_0) = d(0, y_0)\}, \\ B &= \{x \in M \ ; \ d(x, y_0) < d(0, y_0)\}, \\ C &= \{x \in M \ ; \ d(x, y_0) > d(0, y_0))\}. \end{aligned}$$

Remarquons que

· les points 0 et x_1 sont dans A,
· le point y_0 est dans B,
· si $x \in A, y \in B$ et $z \in C$, alors, par ultramétricité,

$$\begin{aligned} &d(x,y) = d(0,y_0), \\ &d(x,z) = d(0,z) = d(y_0,z) = d(y,z), \end{aligned}$$

· si $x, x' \in A$, $d(x,x') \leq d(0,y_0)$.

Le premier point extrémal f sera la fonction "distance à 0" :

$$\forall x \in M, f(x) = d(0,x).$$

Cette fonction f est clairement un point extrémal de la boule unité.

Définissons la fonction g :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = d(0,x), & x \in A \cup C, \\ \sup\limits_{z \in A \cup C} d(0,z) - d(z,x), & x \in B. \end{cases}$$

Remarquons que les fonctions f et g sont constantes sur B et pour $y \in B$:

$$\begin{aligned} f(y) &= d(0,y_0), \\ g(y) &= \sup_{z \in A \cup C} d(0,z) - d(z,y_0). \end{aligned}$$

De plus, toujours pour $y \in B$,

$$\begin{aligned} d(0,x_1) - d(0,y_0) &= d(0,x_1) - d(x_1,y_0) \\ &\leq g(y) = \begin{cases} 0, & C \neq \emptyset, \\ \sup\limits_{x \in A} d(0,x) - d(0,y_0) \leq 0, & C = \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Montrons que g est de norme 1 :
   · Pour $x, y \in B$, $g(x) - g(y) = 0$.
   · Pour $x, y \in A \cup C$,

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)} = \frac{|d(0,y) - d(0,x)|}{d(x,y)} \leq 1.$$

   · Soient $x \in A \cup C$ et $y \in B$. Premièrement si $C \neq \emptyset$, alors

$$|g(x) - g(y)| = d(x,0) \leq d(x,y).$$

   Supposons maintenant $C = \emptyset$, alors $x \in A$ et

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= d(0,x) - \sup_{z \in A}(d(0,z) - d(0,y_0)) \\ &= d(0,y_0) - \sup_{z \in A}(d(0,z) - d(0,x)) \\ &\leq d(0,y_0) = d(x,y). \end{aligned}$$

Finalement, $\|g\|_L = 1$.

2. Montrons que g est un point extrémal de $\overline{B}_{Lip_0(M)}$. Soient $v, w \in \overline{B}_{Lip_0(M)}$ tels que $g = \frac{v+w}{2}$.
   - Trivialement, $v(0) = w(0) = 0$.
   - Soit $z \in A \cup C$, alors
   $$v(z) = v(z) - v(0) \leq d(0,z)$$
   et
   $$w(z) = w(z) - w(0) \leq d(0,z).$$
   Or
   $$d(0,z) = g(z) = \frac{v(z)+w(z)}{2},$$
   donc $v(z) = w(z) = g(z)$.
   - Soient $y \in B$ et $z \in A \cup C$. Par hypothèse nous savons que
   $$|v(z) - v(y)| \leq d(z,y).$$
   En particulier
   $$d(0,z) - v(y) \leq d(z,y).$$
   Ainsi nous obtenons
   $$\sup_{z \in A \cup C} (d(0,z) - d(z,y)) \leq v(y)$$
   et donc $g(y) \leq v(y)$.
   De la même façon $g(y) \leq w(y)$ et donc $v = w = g$. Finalement g est un point extrémal de $\overline{B}_{Lip_0(M)}$.
3. Il ne reste plus qu'à montrer que $\|f - g\|_L < 2$.
   - Si $x, y \in A \cup C$, alors
   $$|(f(x) - g(x)) - (f(y) - g(y))| = 0 \leq d(x,y).$$
   - Si $x, y \in B$, alors comme la fonction $f - g$ est constante sur B,
   $$|(f(x) - g(x)) - (f(y) - g(y))| = 0 \leq d(x,y).$$
   - Finalement, si $y \in B$,
   $$\begin{aligned}
   |f(y) - g(y)| &= d(0,y) - \sup_{z \in A \cup C} (d(0,z) - d(z,y_0)) \\
   &= \begin{cases} d(0,y_0) - \sup_{z \in A}(d(0,z) - d(0,y_0)), & C = \emptyset, \\ d(0,y_0), & C \neq \emptyset, \end{cases} \\
   &\leq \begin{cases} 2d(0,y_0) - d(0,x_1), & C = \emptyset, \\ d(0,y_0), & C \neq \emptyset. \end{cases}
   \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\|f-g\|_L$:

$$\begin{aligned}\|f-g\|_L &= \sup_{\substack{x\in A\cup C\\ y\in B}} \frac{|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|}{d(x,y)} = \sup_{\substack{x\in A\cup C\\ y\in B}} \frac{|f(y)-g(y)|}{d(x,y)}\\ &< 2\times\frac{d(0,y_0)}{d(x,y)} \leq 2.\end{aligned}$$

Finalement nous avons montré qu'il existe deux points extrémaux de la boule unité de $Lip_0(M)$ à distance strictement inférieure à 2, ce qui est impossible dans la boule unité d'un espace ℓ_∞.

Ainsi $Lip_0(M)$ n'est pas linéairement isométrique à un espace ℓ_∞ et donc $\mathcal{F}(M)$ n'est pas linéairement isométrique à un espace ℓ_1. □

De manière indépendante et avec une autre preuve, Cúth et Doucha [C-D] ont obtenu le même résultat pour les espaces ultramétriques séparables.

Remarque 69. Kloeckner [Kl] a montré que pour un espace ultramétrique compact M, l'espace L_p de Wasserstein de M est affinement isométrique a un sous-ensemble convexe de $(\ell_1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1^p)$. L'espace L_1 de Wasserstein de M est l'ensemble des mesures de probabilité Boréliennes muni de la distance du transport optimal. Cet espace est un sous-ensemble convexe de $\mathcal{F}(M)$.

Ainsi nous savons que si M est un espace ultramétrique compact, alors $\mathcal{F}(M)$ est isomorphe mais pas linéairement isométrique à $\ell_1(\mathbb{N})$ et contient un sous-ensemble convexe engendrant $\mathcal{F}(M)$ qui est affinement isométrique à un sous-ensemble convexe de $\ell_1(\mathbb{N})$.

3.3.3 Espaces ultramétriques finis

Lorsque M est un espace ultramétrique fini, il est possible d'obtenir plus d'informations sur la boule unité de $Lip_0(M)$:

Proposition 70. *Soit $M=\{x_0=0,x_1,\dots,x_n\}$ un espace ultramétrique. Alors la boule unité de $Lip_0(M)$ ne peut pas s'écrire comme l'intersection de $n(n+1)-1$ demi-espaces.*

En particulier, l'espace $\mathcal{F}(M)$ n'est pas isométrique à ℓ_1^n lorsque $n\geq 2$.

La preuve repose sur le lemme suivant, adapté du Lemme 2.3 de [B-V] :

Lemme 71. *Soient X un espace de Banach, $N\in\mathbb{N}$ et $C=\bigcap_{i=1}^{N}(x_i^*)^{-1}(]-\infty,1])$, où $x_i^*\in X^*$ pour $i\in\{1,\dots N\}$. Soit A un sous-ensemble de $X\backslash C$ tel que :*

$$x\neq y\in A \Rightarrow \frac{x+y}{2}\in C.$$

Alors le cardinal de A est inférieur à N.

Preuve : Pour $x \in A$, définissons

$$\varphi(x) := \min\{i \in \{1,\dots,N\} \ ; \ x_i^*(x) > 1\}.$$

Si $y \in A\backslash\{x\}$, alors $\frac{x+y}{2} \in C$ et donc $x^*_{\varphi(x)}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1$. Ainsi $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ et nous pouvons conclure que $\#A \leq N$. □

Preuve de la Proposition 70 : Nous allons construire, pour tous $i \neq j \in \{0,\dots,n\}$, une fonction $f_{i,j} \in S_{Lip_0(M)}$ telle que

$$\frac{f_{i,j}(x_k) - f_{i,j}(x_l)}{d(x_k,x_l)} = 1 \iff i = k \text{ et } j = l.$$

Ainsi, si

$$\lambda = \max\left\{\left\|\frac{f_{i,j}+f_{k,l}}{2}\right\|_L \ ; \ i \neq j, k \neq l \in \{0,\dots,n\}, (i,j) \neq (k,l)\right\},$$

alors $\lambda < 1$ car pour $i \neq j, k \neq l \in \{0,\dots,n\}$ tels que $(i,j) \neq (k,l)$, nous avons

$$\left\|\frac{f_{i,j}+f_{k,l}}{2}\right\|_L = \frac{1}{2}\sup_{p\neq q}\frac{f_{i,j}(x_p) - f_{i,j}(x_q) + f_{k,l}(x_p) - f_{k,l}(x_q)}{d(x_p,x_q)} < 1.$$

L'ensemble

$$A = \left\{\frac{1}{\lambda}f_{i,j} \ ; \ 0 \leq i \neq j \leq n\right\}$$

vérifie donc $A \subset Lip_0(M)\backslash\overline{B}_{Lip_0(M)}$ et si $f \neq g \in A$ alors $\frac{f+g}{2} \in \overline{B}_{Lip_0(M)}$.

De plus, $\#A = (n+1)n$ donc d'après le Lemme 71, la boule $\overline{B}_{Lip_0(M)}$ ne peut pas s'écrire comme intersection de $(n+1)n - 1$ demi-espaces.

La construction de ces fonctions se fait grâce au lemme suivant :

Lemme 72. *Soient N un espace ultramétrique fini, $x \in N$ et $f : N\backslash\{x\} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Alors la fonction f peut être prolongée en x de telle sorte que pour $y \in N\backslash\{x\}$,*

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} < L.$$

Preuve : L'espace N étant ultramétrique et fini, il est possible de lui ajouter un point z tel que :

$$d(z,x) = \frac{1}{2}\min\{d(x,y) : y \in N\backslash\{x\}\}$$

et pour $y \in N\backslash\{x\}$,

$$d(y,z) = d(y,x) - d(z,x).$$

Pour vérifier que d est toujours une distance, il faut montrer qu'elle satisfait l'inégalité triangulaire. Remarquons tout d'abord que $d(z,x) \leq d(z,y)$, pour $y \in N$.

Si $y \in N \backslash \{x\}$, alors

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(y,z) < d(x,y) + d(y,z), \\ d(z,y) &= d(x,y) - d(z,x) < d(x,y) + d(z,x), \\ d(x,y) &= d(z,y) + d(z,x). \end{aligned}$$

Soient maintenant $y, t \in N \backslash \{x\}$. Supposons $d(x,t) \leq d(x,y)$. Alors,

$$d(y,t) \leq \max\{d(y,x), d(x,t)\} = d(x,y) = d(y,z) + d(z,x) \leq d(y,z) + d(z,t).$$

De plus, si $d(x,t) < d(x,y)$, alors $d(x,y) = d(y,t)$ et

$$\begin{aligned} d(z,y) &= d(x,y) - d(z,x) = d(y,t) - d(z,x) < d(y,t) + d(z,t), \\ d(z,t) &< d(x,t) + d(z,x) \leq d(x,t) + d(z,y) < d(y,t) + d(z,y). \end{aligned}$$

Finalement, si $d(x,t) = d(x,y)$, alors

$$d(z,y) = d(x,y) - d(z,x) = d(x,t) - d(z,x) = d(z,t) < d(z,t) + d(t,y).$$

Définissons f en z grâce à la formule d'inf-convolution :

$$f(z) = \inf\{f(y) + L \times d(y,z) \ ; \ y \in N \backslash \{x\}\}.$$

Notons que la constante de Lipschitz de f n'augmente pas.

Posons finalement $f(x) := f(z)$. Alors quel que soit $y \in N \backslash \{x\}$,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = \frac{|f(z) - f(y)|}{d(y,z) + d(z,x)} < \frac{|f(z) - f(y)|}{d(y,z)} \leq L.$$

Nous avons donc bien prolongé la fonction f au point x par une fonction n'atteignant pas sa constante de Lipschitz en un couple de la forme (x,y), $y \neq x$. □

Pour conclure la preuve de la Proposition 70 il ne reste qu'à construire les fonctions $f_{i,j}$, $i \neq j \in \{0, \dots, n\}$, telles que

$$\frac{f_{i,j}(x_k) - f_{i,j}(x_l)}{d(x_k, x_l)} = 1 \iff i = k \text{ et } j = l.$$

Soient $i \neq j \in \{0, \dots, n\}$. Commençons par définir une fonction $\widetilde{f}_{i,j}$ en x_i et x_j telle que

$$\widetilde{f}_{i,j}(x_i) - \widetilde{f}_{i,j}(x_j) = d(x_i, x_j).$$

Puis prolongeons cette fonction à M tout entier par une application répétée du lemme précédent. Enfin posons $f_{i,j}(\cdot) = \widetilde{f}_{i,j}(\cdot) - \widetilde{f}_{i,j}(0)$.

La conclusion se fait comme expliqué en début de preuve : en appliquant le Lemme 71 à

$$A = \left\{ \frac{1}{\lambda} f_{i,j} \ ; \ 0 \leq i \neq j \leq n \right\}$$

où

$$\lambda = \max \left\{ \left\| \frac{f_{i,j} + f_{k,l}}{2} \right\|_L \ ; \ i \neq j, k \neq l \in \{0, \dots, n\}, (i,j) \neq (k,l) \right\}.$$

Nous déduisons que la boule unité de $Lip_0(M)$ ne peut pas s'écrire comme intersection de $n(n+1) - 1$ demi-espaces. □

3.4 Cas de certains sous-ensembles d'un arbre réel

Nous avons déjà mentionné qu'un espace ultramétrique est un sous-ensemble d'un arbre réel. De plus, Godard a montré que si M est un sous-ensemble infini d'un arbre réel séparable tel que $Br(T) \subset \overline{M}$ et $\overline{M}$ ne contient pas de segment, alors $\mathcal{F}(M)$ est isométrique à $\ell_1(\mathbb{N})$ (cf Théorème 67). Nous nous sommes donc demandé : si M est un sous-ensemble infini d'un arbre réel séparable, ne contenant pas de segment, a-t-on : $\mathcal{F}(M) \equiv \ell_1(\mathbb{N})$ si et seulement si $Br(T) \subset \overline{M}$?

Nous travaillons actuellement sur cette question. Les résultats donnés dans cette section sont ceux que nous avons au moment de la rédaction.

Commençons pas énoncer un lemme tiré des Lemmes 3.20 et 3.22 de [E] :

Lemme 73. *Soient (T, d) un arbre réel et $u, v, w \in T$.*

(i) Il existe un unique point $b \in T$ tel que $[u, v] \cap [u, w] = [u, b]$.

(ii) De plus ce point vérifie

$$[v, b] \cap [b, w] = \{b\},$$
$$[v, w] = [v, b] \cup [b, w],$$
$$[u, v] \cap [b, w] = \{b\}$$

et pour $v' \in [u, v]$, $w' \in [u, w]$,

$$d(v', w') = \begin{cases} |d(u, v') - d(u, w')|, & si \ \min\{d(u, v'), d(u, w')\} \leq d(u, b), \\ d(u, v') + d(u, w') - 2d(u, b), & sinon. \end{cases}$$

Le point (i) de ce lemme justifie la définition de l'application π de la proposition suivante.

Proposition 74. *Soit M un sous-ensemble complet d'un arbre réel séparable (T, d). Supposons que T admette un point de branchement $b \notin M$ isolé dans $M \cup \{b\}$. Soient x, y et z trois points témoignant de $b \in Br(T)$ tels que $([b, x] \cup [b, y] \cup [b, z]) \cap M = \{x, y, z\}$.*

Supposons que pour chaque $p \in \{x, y, z\}$,

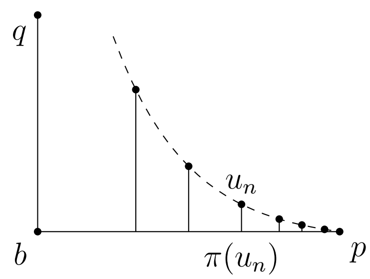
$$\liminf_{\substack{u,v \to p \\ \pi(u),\pi(v) \in [b,p]}} \frac{d(\pi(u), u) + d(\pi(v), v)}{d(\pi(u), \pi(v))} > 0, \tag{3.1}$$

où π est l'application qui à w dans M associe le point le plus proche de w dans $[b, x] \cup [b, y] \cup [b, z]$.

Alors la boule unité de $\mathcal{F}(M)$ admet deux points extrémaux à distance inférieure à 1.

Remarquons que les hypothèses de cette proposition regroupent une grande classe de sous-ensembles infinis M d'arbres réels T tels que M ne contient pas de segment, $Br(T) \not\subseteq \overline{M}$ et $\mathcal{F}(M)$ n'est pas linéairement isométrique à $\ell_1(\mathbb{N})$.

Nous verrons que la preuve que nous avons pour le moment ne prend pas en compte les sous-ensembles M pour lesquels autour de tous les points de branchement de T isolés dans $M \cup \{b\}$, tous les points, sauf éventuellement 2, sont des points d'accumulation avec une suite qui s'accumule de manière tangentielle (c'est l'hypothèse (3.1) de la Proposition 74) :



Dans la preuve de cette proposition nous utiliserons la notion de *fonction admettant un pic* :

Définition 75. Soit (M,d) un espace métrique pointé complet et

$$\widetilde{M} = \{(x,y) \in M \times M ; x \neq y\}.$$

Une fonction f dans la boule unité de $Lip_0(M)$ **admet un pic** en $(x,y) \in \widetilde{M}$ lorsqu'elle vérifie :

(i) $\frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)} = 1$ et

(ii) pour tout U ouvert de $\widetilde{M}$ tel que (x,y) et (y,x) appartiennent à U, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$(z,t) \notin U \Longrightarrow \frac{|f(z)-f(t)|}{d(z,t)} \leq 1-\delta.$$

Remarquons que cette définition admet un équivalent séquentiel :

Lemme 76. *Soient (M,d) un espace métrique pointé, $f \in S_{Lip_0(M)}$ et $(x,y) \in \widetilde{M}$ tels que*

(i) $\frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)} = 1$ *et*

(ii) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de M, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)-f(v_n)}{d(u_n,v_n)} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = y.$$

Alors f admet un pic en (x,y).

Il est démontré dans la proposition 2.4.2 de [W] que s'il existe une fonction admettant un pic en (x,y), alors l'élément $\frac{\delta_x-\delta_y}{d(x,y)}$ est un point extrémal de la boule unité de $Lip_0(M)^*$. En particulier cet élément est un point extrémal de la boule unité de l'espace Lipschitz-libre :

Proposition 77. *Soient (M,d) un espace métrique pointé complet et $(x,y) \in \widetilde{M}$. S'il existe une fonction de $\overline{B}_{Lip_0(M)}$ admettant un pic en (x,y), alors $\frac{\delta_x-\delta_y}{d(x,y)}$ est un point extrémal de $\overline{B}_{Lip_0(M)^*}$.*

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires à la preuve de la Proposition 74.

Preuve de la Proposition 74 : Supposons $d(z,x) \leq d(z,y) \leq d(x,y)$. Nous allons construire des fonctions $f_{x,y}$ et $f_{z,y}$ admettant un pic respectivement en (x,y) et (z,y), puis montrer que la distance entre $\frac{\delta_x - \delta_y}{d(x,y)}$ et $\frac{\delta_z - \delta_y}{d(y,z)}$ est inférieure à 1.

Définissons la fonction $f_{x,y}$, la construction étant la même pour la fonction $f_{z,y}$:

$$f_{x,y}(u) = \begin{cases} d(y,u), & u \in [x,y], \\ d(y,b), & u \in [z,b], \\ f_{x,y}(\pi(u)), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Clairement

$$\frac{f_{x,y}(x) - f_{x,y}(y)}{d(x,y)} = 1$$

et des calculs directs utilisant le Lemme 73(ii) permettent de conclure que la fonction $f_{x,y}$ est 1-Lipschitzienne.

Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de M telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{x,y}(u_n) - f_{x,y}(v_n)}{d(u_n,v_n)} = 1$$

et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Sans perte de généralité, supposons $\pi(u_n) \neq \pi(u_m)$, $\pi(v_n) \neq \pi(v_m)$ pour $m \neq n$, $\pi(u_n) \neq \pi(v_n)$ et

$$[x,y] = [x,\pi(u_n)] \cup [\pi(u_n),\pi(v_n)] \cup [\pi(v_n),y], \tag{3.2}$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

Alors nous avons

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n) - f(v_n)}{d(u_n,v_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{d(\pi(u_n),\pi(v_n))}{d(u_n,\pi(u_n)) + d(\pi(u_n),\pi(v_n)) + d(\pi(v_n),v_n)}.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_n,\pi(u_n)) = \lim_{n\to+\infty} d(v_n,\pi(v_n)) = 0.$$

Le segment $[x,y]$ étant compact, la suite $(\pi(u_n),\pi(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet un point d'accumulation $(u,v) \in [x,y]^2$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} d(u_n,\pi(u_n)) = \lim_{n\to+\infty} d(v_n,\pi(v_n)) = 0$, donc (u,v) est un point d'accumulation de $(u_n,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'espace M étant complet, $(u,v) \in M^2$ donc $(u,v) \in \{(y,x),(x,x),(y,y),(x,y)\}$. D'après l'hypothèse (3.2), $(u,v) \neq (y,x)$.

Supposons $(u,v) = (x,x)$ ou (y,y). D'après l'hypothèse (3.1),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{d(\pi(u_n),u_n) + d(\pi(v_n),v_n)}{d(\pi(u_n),\pi(v_n))} > 0.$$

Or, en utilisant le Lemme 73(ii),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{d(\pi(u_n),u_n) + d(\pi(v_n),v_n)}{d(\pi(u_n),\pi(v_n))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{d(u_n,v_n)}{d(\pi(u_n),\pi(v_n))} - 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{d(u_n,v_n)}{f_{x,y}(u_n) - f_{x,y}(v_n)} - 1,$$

ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{x,y}(u_n)-f_{x,y}(v_n)}{d(u_n,v_n)} < 1$ et contredit notre définition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi $(u,v) = (x,y)$ et d'après le Lemme 76 la fonction $f_{x,y}$ admet un pic en (x,y). Grâce à la Proposition 77, nous obtenons que l'élément $\frac{\delta_x-\delta_y}{d(x,y)}$ est un point extrémal de la boule unité de $\mathcal{F}(M)$.

De même, il est possible de montrer que $\frac{\delta_z-\delta_y}{d(y,z)}$ est également un point extrémal de la boule unité de $\mathcal{F}(M)$.

Il ne reste plus qu'à montrer que la distance entre $\frac{\delta_x-\delta_y}{d(x,y)}$ et $\frac{\delta_z-\delta_y}{d(y,z)}$ est inférieure à 1. Rappelons que nous avons supposé $d(x,z) \leq d(z,y) \leq d(x,y)$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\delta_x-\delta_y}{d(x,y)} - \frac{\delta_z-\delta_y}{d(y,z)}\right\|_{\mathcal{F}(M)} &= \left\|\left[\frac{1}{d(x,y)} - \frac{1}{d(y,z)}\right](\delta_z-\delta_y) + \frac{\delta_x-\delta_z}{d(x,y)}\right\|_{\mathcal{F}(M)} \\
&\leq d(z,y)\left[\frac{1}{d(y,z)} - \frac{1}{d(x,y)}\right] + \frac{d(x,z)}{d(x,y)} \\
&= 1 + \frac{d(x,z)-d(z,y)}{d(x,y)} \leq 1.
\end{aligned}$$

En conclusion $\frac{\delta_x-\delta_y}{d(x,y)}$ et $\frac{\delta_z-\delta_y}{d(y,z)}$ sont deux points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{F}(M)$ à distance inférieure à 1. □

Nous avons déjà mentionné que sans l'hypothèse (3.1) de la Proposition 74, la preuve donnée n'est plus valide. Donnons un contre-exemple à cette affirmation :

Contre-exemple 78. Soit (M,d) un sous-ensemble complet d'un arbre réel T, b un point de branchement de T isolé dans $M\cup\{b\}$ et $x,y,z\in M$ trois points témoignant de $b\in Br(T)$ tels que $([b,x]\cup[b,y]\cup[b,z])\cap M = \{x,y,z\}$.

Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M qui converge vers x et telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\pi(u_n)\in[b,x]$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{d(\pi(u_n),u_n)}{d(\pi(u_n),x)} = 0.$$

En particulier, $d(\pi(u_n),u_n) = o(d(u_n,x))$.

Montrons que dans ce cas il n'existe pas de fonction admettant un pic en (x,y).

Soit $f\in S_{Lip_0(M)}$ telle que $\frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)} = 1$. Alors en utilisant le Lemme 73(ii),

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(u_n)| &\geq |f(x)-f(\pi(u_n))| - |f(\pi(u_n))-f(u_n)| \\
&= d(x,\pi(u_n)) - |f(\pi(u_n))-f(u_n)| \\
&\geq d(x,\pi(u_n)) - d(\pi(u_n),u_n) \\
&\geq d(x,u_n) - 2d(\pi(u_n),u_n) \\
&= d(x,u_n) + o(d(x,u_n)).
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f(x)-f(u_n)|}{d(x,u_n)} = 1.$$
Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \neq y$. D'après le Lemme 76, la fonction f n'admet pas de pic en (x,y).

Ainsi sans l'hypothèse (3.1) il n'est pas possible d'utiliser la Proposition 77 pour montrer que $\frac{\delta_x-\delta_y}{d(x,y)}$ et $\frac{\delta_z-\delta_y}{d(z,y)}$ sont deux points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{F}(M)$. Cependant, cela ne signifie pas nécessairement qu'ils ne le sont pas.

3.5 Perspectives

Nous avons vu dans le Chapitre 1 que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique propre est un espace dual et dans ce chapitre que cet espace a la MAP et est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$. De plus, Cúth et Doucha ont généralisé ces deux derniers résultats en prouvant que l'espace Lipschitz-libre sur un espace ultramétrique séparable a une base de Schauder monotone et est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$. Nous pouvons donc nous demander si le résultat de dualité peut également être obtenu sans supposer que l'espace ultramétrique est propre. De plus si c'est le cas, existe-t-il un prédual isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$?

Annexe A

L'espace $\ell_1(\mathbb{N})$ est complémenté dans l'espace $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N}))$

Un problème classique de classification non linéaire des espaces de Banach est de savoir si deux espaces Lipschitz-équivalents sont isomorphes. Aharoni et Lindenstrauss ont exhibé dans [A-L] deux espaces non séparables qui sont Lipschitz-équivalents mais non isomorphes. Pour ce qui est des espaces séparables, nous savons qu'un espace Lipschitz-équivalent à $c_0(\mathbb{N})$, $\ell_p(\mathbb{N})$ ou L_p, $1 < p < +\infty$, lui est isomorphe.

Nous ne savons pas ce qu'il en est de l'espace $\ell_1(\mathbb{N})$. Toutefois,

Supposons l'espace $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))$ complémenté dans son bidual.
Si X est un espace de Banach Lipschitz-équivalent à $\ell_1(\mathbb{N})$, alors X est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$.

Preuve : Par Heinrich et Mankiewicz [H-M], nous savons qu'un espace de Banach qui est Lipschitz-équivalent à $\ell_1(\mathbb{N})$ et complémenté dans son bidual est isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$. Nous allons donc montrer que X est complémenté dans son bidual.

D'après le Théorème 2.13 [G-K] de Godefroy et Kalton, un espace de Banach séparable X est isométrique à Y un sous-espace complémenté de $\mathcal{F}(X)$: soit $P : \mathcal{F}(X) \to Y$ une projection linéaire continue.

De plus, comme X est Lipschitz-équivalent à $\ell_1(\mathbb{N})$, d'après le Fait 3, $\mathcal{F}(X)$ est isomorphe à $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))$. En particulier, $\mathcal{F}(X)^{**}$ est isomorphe à $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))^{**}$. Nous avons supposé que $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))$ est complémenté dans $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))^{**}$, nous obtenons donc que $\mathcal{F}(X)$ est complémenté dans $\mathcal{F}(X)^{**}$: soit $Q : \mathcal{F}(X)^{**} \to \mathcal{F}(X)$ une projection linéaire continue.

En identifiant Y^{**} avec $Y^{\perp\perp} \subset \mathcal{F}(X)^{**}$, nous obtenons que $PQ_{|Y^{**}}$ est une projection de Y^{**} sur Y. Finalement, X et Y étant linéairement isométrique, nous concluons que X est complémenté dans X^{**}. $\square$

Une idée pour obtenir que $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))$ n'est pas complémenté dans son bidual serait de montrer que $c_0(\mathbb{N})$ est isomorphe à un sous-espace de $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))$.

En effet si $c_0(\mathbb{N})$ était isomorphe à un sous-espace de $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))$, alors $c_0(\mathbb{N})$ serait complémenté dans $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))$, par un résultat de Sobczyk [S]. En particulier $\ell_\infty(\mathbb{N})$ serait isomorphe à un sous-espace de $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))^{**}$. Si de plus $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))$ était complémenté dans $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))^{**}$, alors $c_0(\mathbb{N})$

serait complémenté dans $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))^{**}$ et donc dans $\ell_\infty(\mathbb{N})$, ce qui est exclus par un résultat de Phillips [P].

Dans [B], Bourgain a montré que les ℓ_1^n sont uniformément complémenté dans $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N}))$ uniformément en n (voir aussi [O]). En adaptant la preuve de ce résultat nous obtenons que $\ell_1(\mathbb{N})$ est complémenté dans $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N}))$.

Proposition 79. *L'espace $\ell_1(\mathbb{N})$ est complémenté dans $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N}))$.*

Pour prouver cette proposition, nous utiliserons les notions d'ensemble de Sidon et d'ensemble quasi-indépendant. Rappelons les définitions et propriétés dont nous aurons besoin. Nous invitons le lecteur à consulter [L-Q] pour plus d'informations à ce sujet.

Définition 80. Soient G un groupe abélien compact métrisable et Γ son groupe dual. Un sous-ensemble Λ de Γ est un **ensemble de Sidon** si toute fonction continue sur G telle que Λ contient le support de $\hat{f}$ vérifie

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{f}(\gamma)| = \sum_{\gamma\in\Lambda} |\hat{f}(\gamma)| < +\infty,$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Par le Théorème de Banach-Steinhaus, il existe un constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |\hat{f}(\gamma)| \leq C\|f\|_\infty,$$

pour toute fonction continue sur G telle que Λ contient le support de $\hat{f}$.

Théorème 81 (Drury)**.** *La réunion de deux ensembles de Sidon est un ensemble de Sidon.*

Définition 82. Un partie B de $\mathbb{Z}$ est **quasi-indépendante** lorsque pour toute partie finie $B' \subset B$,

$$\sum_{n\in B'} \varepsilon_n n = 0, \varepsilon_n \in \{0, \pm 1\} \Longrightarrow \varepsilon_n = 0, \forall n \in B'.$$

Proposition 83. *Un ensemble quasi-indépendant est un ensemble de Sidon de constante bornée par* 8.

Nous utiliserons la notation $\|\cdot\|_L$ pour parler de la constante de Lipschitz d'une fonction même si cette fonction ne s'annule pas en 0. Dans ce cas, $\|\cdot\|_L$ n'est pas une norme sur l'espace des fonctions Lipschitziennes.

Preuve de la Proposition 79 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe une application quotient $Q_n : Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n}) \to \ell_1^n$ de norme indépendante de n, où $]-\pi,\pi[^{2^n}$ est muni de la distance

$$d(\theta,\theta') = \sum_{s=1}^{2^n} |e^{i\theta_s} - e^{i\theta'_s}|,\ \theta,\theta' \in]-\pi,\pi[^{2^n}.$$

Cette partie de la preuve est due à Bourgain [B] (voir aussi [O]).

Commençons par construire Q_n et montrer que cet opérateur est surjectif.
L'espace des fonctions Lipschitziennes différentiables sur $]-\pi,\pi[^{2^n}$ étant dense dans $Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n})$, nous allons définir Q_n sur ce premier espace.
Remarquons que si f est différentiable sur $]-\pi,\pi[^{2^n}$, alors grâce au théorème des accroissements finis,

$$\|f\|_L = \max_{1\leq t\leq 2^n} \sup_{\theta\in]-\pi,\pi[^{2^n}} \left|\frac{\partial f}{\partial \theta_t}(\theta)\right|, \tag{A.1}$$

où $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_{2^n})$.

Soient $(k_j)_{j\geq 1}$ une suite d'entiers telle que pour tout $j>1$,

$$k_j - \sum_{l<j} k_l > 0$$

et $\{(\sigma_j^{(s)})_{j=1}^n\}_{s=1}^{2^n} = \{-1,1\}^n$.
Pour $\overline{p} = (p_1,\ldots,p_{2^n}) \in \mathbb{Z}^{2^n}$, notons

$$\hat{f}(\overline{p}) = \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} f(\theta) e^{-i\sum\limits_{s=1}^{2^n} p_s\theta_s} \frac{d\theta}{(2\pi)^{2^n}}.$$

Définissons alors

$$\begin{array}{rcl} Q_n : Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n}) & \to & \ell_1^n \\ f & \mapsto & \{k_j\hat{f}(k_j\sigma_j)\}_{j=1}^n \end{array},$$

où $\sigma_j = (\sigma_j^{(1)},\ldots,\sigma_j^{(2^n)})$.

Pour montrer que Q_n est une application quotient nous allons montrer que l'image de la boule unité de $Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n})$ contient la boule unité de ℓ_1^n.
Pour $j\leq n$ et $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_{2^n}) \in]-\pi,\pi[^{2^n}$, définissons

$$g_j(\theta) = \frac{1}{k_j}\left(e^{ik_j\sum\limits_{s=1}^{2^n}\sigma_j^{(s)}\theta_s} - 1\right).$$

Alors $g_j \in S_{Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n})}$ par l'égalité A.1.
De plus, pour $l\leq n$,

$$\hat{g}_j(k_l\sigma_l) = \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} \frac{1}{k_j}\left(e^{ik_j\sum\limits_{s=1}^{2^n}\sigma_j^{(s)}\theta_s} - 1\right) e^{-i\sum\limits_{s=1}^{2^n}k_l\sigma_l^{(s)}\theta_s}\frac{d\theta}{(2\pi)^{2^n}} = \begin{cases} \frac{1}{k_j}, & \text{si } l=j, \\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Nous en déduisons que $Q_n(g_j) = e_j$, où $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est la base canonique de ℓ_1^n.

Soit maintenant $x \in B_{\ell_1^n}$. Alors il existe $(x_j)_{j=1}^n$ une suite de réels telle que $\sum\limits_{j=1}^n |x_j| \le 1$ et

$$x = \sum_{j=1}^n x_j Q_n(g_j) = Q_n\left(\sum_{j=1}^n x_j g_j\right).$$

Nous avons donc montré que la boule unité de ℓ_1^n est contenue dans l'image de la boule unité de $Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n})$, c'est-à-dire que Q_n est une application surjective.

Montrons que l'opérateur Q_n est borné indépendamment de n.
Pour $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{2^n}) \in]-\pi,\pi[^{2n}$, définissons

$$A(\theta) = \prod_{j=1}^n \left[1 + \cos\left(k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)} \theta_s\right)\right].$$

Remarquons que $A(\theta)$ est positif et que

$$\int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} A(\theta) d\theta = (2\pi)^{2^n}.$$

Soient $f \in Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n})$ et $\theta, \theta' \in]-\pi,\pi[^{2^n}$. Alors,

$$\begin{aligned} |f * A(\theta) - f * A(\theta')| &= \left|\int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} f(\theta+\Gamma)A(-\Gamma) - f(\theta'+\Gamma)A(-\Gamma)\frac{d\Gamma}{(2\pi)^{2^n}}\right| \\ &\le \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} \|f\|_L d(\theta,\theta') A(-\Gamma)\frac{d\Gamma}{(2\pi)^{2^n}} \\ &= \|f\|_L d(\theta,\theta') \end{aligned}$$

où $*$ désigne le produit de convolution de deux fonctions. Ainsi,

$$\|f * A\|_L \le \|f\|_L.$$

Montrons que pour tout $f \in Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n})$ et tout $t \in \{1, \dots, 2^n\}$, le support de $\widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}$ est un ensemble de Sidon, de constante indépendante de n, contenant $\{k_j\sigma_j^{(1)}, \dots, k_j\sigma_j^{(2^n)}\}$. Pour cela commençons par montrer que pour $f \in Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n})$ et $\theta \in]-\pi,\pi[^{2^n}$,

$$f * A(\theta) = \hat{f}(0) + \sum_{l=1}^n D_{l,+}(\theta) e^{ik_l \sum\limits_{s=1}^{2^n} \sigma_l^{(s)}\theta_s} + D_{l,-}(\theta) e^{-ik_l \sum\limits_{s=1}^{2^n} \sigma_l^{(s)}\theta_s}$$

où

$$D_{l,+}(\theta) = \sum_{\varepsilon \in \{0,\pm1\}^{j-1}} \frac{1}{2^{\|\varepsilon\|_1}} e^{i\sum\limits_{j<l} \varepsilon_j k_j \sum\limits_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)}\theta_s} \hat{f}\left(\sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sigma_j + k_l \sigma_l\right),$$

et

$$D_{l,-}(\theta) = \sum_{\varepsilon \in \{0,\pm 1\}^{j-1}} \frac{1}{2^{\|\varepsilon\|_1}} e^{i \sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)} \theta_s} \hat{f}\left(\sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sigma_j - k_l \sigma_l \right).$$

Soient $f \in Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n})$ et $\theta \in]-\pi,\pi[^{2^n}$,

$$\begin{aligned} f * A(\theta) &= \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} f(\Gamma) A(\theta - \Gamma) \frac{d\Gamma}{(2\pi)^{2^n}} \\ &= \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} f(\Gamma) \prod_{j=1}^{n} \left[1 + \frac{1}{2} \left(e^{ik_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s)} + e^{-ik_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s)} \right) \right] \frac{d\Gamma}{(2\pi)^{2^n}} \\ &= \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} f(\Gamma) \sum_{\varepsilon \in \{0,\pm 1\}^n} \left(\frac{1}{2^{\|\varepsilon\|_1}} e^{i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s)} \right) \frac{d\Gamma}{(2\pi)^{2^n}} \end{aligned}$$

où les ε_j, $1 \leq l \leq n$, indiquent quels éléments ont été multipliés :

- si $\varepsilon_j = 0$ apparaît, cela signifie que le développement est composé d'une multiplication par le 1,
- si $\varepsilon_j = 1$ apparaît, cela signifie que le développement est composé d'une multiplication par $\frac{1}{2} \times e^{ik_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s)}$,
- si $\varepsilon_j = -1$ apparaît, cela signifie que le développement est composé d'une multiplication par $\frac{1}{2} \times e^{-ik_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s)}$.

Ceci justifie également l'apparition du facteur $\frac{1}{2^{\|\varepsilon\|_1}}$.

$$\begin{aligned} f * A(\theta) = & \hat{f}(0) + \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} f(\Gamma) \sum_{l=1}^{n} \sum_{\varepsilon \in \{0,\pm 1\}^{l-1}} \frac{1}{2^{\|\varepsilon\|_1}} \left(e^{i \sum_{j=1}^{l-1} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s) + ik_l \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_l^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s)} \right. \\ & \left. + \quad e^{i \sum_{j=1}^{l-1} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s) - ik_l \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_l^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s)} \right) \frac{d\Gamma}{(2\pi)^{2^n}} \end{aligned}$$

Le terme $\hat{f}(0)$ correspond au cas où $\varepsilon = (0,\ldots,0)$. La première partie de la parenthèse contient les termes pour lesquels $\varepsilon_l = 1$ et la seconde les termes pour lesquels $\varepsilon_l = -1$.

$$f * A(\theta) = \hat{f}(0) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{\varepsilon \in \{0,\pm 1\}^l \\ \varepsilon_l \neq 0}} \frac{1}{2^{\|\varepsilon\|_1}} \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} f(\Gamma) e^{i \sum_{j=1}^{l} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)}(\theta_s - \Gamma_s)} \frac{d\Gamma}{(2\pi)^{2^n}}$$

Cette égalité s'obtient en prenant en compte les termes ayant pour indice l dans la somme sur j.

$$
\begin{aligned}
f * A(\theta) =& \hat{f}(0) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{\varepsilon \in \{0,\pm 1\}^l \\ \varepsilon_l \neq 0}} \frac{1}{2^{\|\varepsilon\|_1}} e^{i \sum_{j=1}^{l} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)} \theta_s} \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} f(\Gamma) e^{-i \sum_{j=1}^{l} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)} \Gamma_s} \frac{d\Gamma}{(2\pi)^{2^n}} \\
=& \hat{f}(0) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\varepsilon \in \{0,\pm 1\}^{l-1}} \left[\frac{1}{2^{\|\varepsilon\|_1}} e^{i \sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)} \theta_s} e^{i k_l \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)} \theta_s} \hat{f}\left(\sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sigma_j + k_l \sigma_l \right) \right. \\
& \left. + \quad e^{i \sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)} \theta_s} e^{-i k_l \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)} \theta_s} \hat{f}\left(\sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sigma_j - k_l \sigma_l \right) \right] \\
=& \hat{f}(0) + \sum_{l=1}^{n} e^{i k_l \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_l^{(s)} \theta_s} D_{l,+}(\theta) + e^{-i k_l \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_l^{(s)} \theta_s} D_{l,-}(\theta).
\end{aligned}
$$

avec

$$
D_{l,\pm}(\theta) = \sum_{\varepsilon \in \{-1,0,+1\}^{j-1}} \frac{1}{2^{\|\varepsilon\|_1}} e^{i \sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sum_{s=1}^{2^n} \sigma_j^{(s)} \theta_s} \hat{f}\left(\sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sigma_j \pm k_l \sigma_l \right).
$$

Alors, après calcul, pour $f \in Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n})$, $t \in \{1,\ldots,2^n\}$ et $\theta \in]-\pi,\pi[^{2^n}$, nous obtenons que $\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}(\theta)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $u_{l,+}$ et $u_{l,-}$, $1 \leq l \leq n$, où pour $\theta \in]-\pi,\pi[^{2^n}$,

$$
\begin{aligned}
u_{l,+}(\theta) &= e^{i \sum_{s=1}^{2^n} \left(k_l \sigma_l^{(s)} + \sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sigma_j^{(s)} \right) \theta_s}, \\
u_{l,-}(\theta) &= e^{i \sum_{s=1}^{2^n} \left(-k_l \sigma_l^{(s)} + \sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sigma_j^{(s)} \right) \theta_s}.
\end{aligned}
$$

Le support de $\widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}$ est donc inclus dans la réunion des supports de $\widehat{u_{l,+}}$ et $\widehat{u_{l,-}}$, $1 \leq l \leq n$.

Soit $\overline{p} \in \mathbb{Z}^{2^n}$,

$$
\begin{aligned}
\widehat{u_{l,+}}(\overline{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{2^n}} \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} e^{i \sum_{s=1}^{2^n} \left(k_l \sigma_l^{(s)} + \sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sigma_j^{(s)} \right) \Gamma_s} e^{-i \sum_{s=1}^{2^n} p_s \Gamma_s} d\Gamma \\
&= \begin{cases} 1, \text{si } \overline{p} = \left(k_l \sigma_l + \sum_{j<l} \varepsilon_j k_j \sigma_j \right), \\ 0, \text{sinon}, \end{cases}
\end{aligned}
$$

et

$$\widehat{u_{l,-}}(\overline{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{2^n}} \int_{]-\pi,\pi[^{2^n}} e^{i\sum_{s=1}^{2^n}\left(-k_l\sigma_l^{(s)}+\sum_{j<l}\varepsilon_j k_j\sigma_j^{(s)}\right)\Gamma_s} e^{-i\sum_{s=1}^{2^n} p_s\Gamma_s} d\Gamma$$
$$= \begin{cases} 1, \text{si } \overline{p} = \left(-k_l\sigma_l + \sum_{j<l}\varepsilon_j k_j\sigma_j\right), \\ 0, \text{sinon}, \end{cases}$$

Ainsi le support de $\widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}$ est inclus dans

$$\left\{\left(k_l\sigma_l + \sum_{j<l}\varepsilon_j k_j\sigma_j\right) \ ; \ \varepsilon_l \in \{-1,0,1\}^{l-1}, 1 \le l \le n\right\}$$
$$\bigcup\left\{\left(-k_l\sigma_l + \sum_{j<l}\varepsilon_j k_j\sigma_j\right) \ ; \ \varepsilon_l \in \{-1,0,1\}^{l-1}, 1 \le l \le n\right\}.$$

Grâce au choix de la suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$, chacun de ces deux ensembles est quasi-indépendant. En particulier ce sont des ensembles de Sidon de constante indépendante de n et donc leur réunion est un ensemble de Sidon de constante indépendante de n. Ainsi, il existe une constante $C > 0$, indépendante de n, telle que

$$\sum_{\overline{p}\in\text{supp } \widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}} \left|\widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}(\overline{p})\right| \le C\left\|\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}\right\|_\infty \le C\max_{1\le s\le 2^n}\left\|\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_s}\right\|_\infty = C\|f*A\|_L$$
$$\le C\|f\|_L.$$

Remarquons que

$$\{k_j\sigma_j \ ; \ 1 \le j \le n\} \subset \text{supp } \widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}.$$

De plus avec un peu de patience, le calcul de $\widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}$ donne, pour $1 \le j \le n$,

$$\widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}(k_j\sigma_j) = ik_j\sigma_j^{(t)}\hat{f}(k_j\sigma_j).$$

Nous en déduisons donc que

$$\|Q_n(f)\|_1 = \sum_{j=1}^n |k_j\hat{f}(k_j\sigma_j)| = \sum_{j=1}^n |ik_j\sigma_j^{(t)}\hat{f}(k_j\sigma_j)| = \sum_{\overline{p}\in\{k_j\sigma_j \ ; \ 1\le j\le n\}} \left|\widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}(\overline{p})\right|$$
$$\le \sum_{\overline{p}\in\text{supp } \widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}} \left|\widehat{\frac{\partial(f*A)}{\partial\theta_t}}(\overline{p})\right| \le C\|f\|_L.$$

Finalement, nous avons montré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la norme de Q_n est inférieure à C.
En conclusion nous avons construit une suite d'opérateurs quotients

$$Q_n : Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n}) \to \ell_1^n,$$

de normes uniformément bornés.
Rappelons que cette première partie de la preuve est due à Bourgain [B].

2. Considérons maintenant l'ensemble

$$M := \{\theta \in]-\pi,\pi[^{\mathbb{N}} \; ; \; \exists S \in \mathbb{N}, \forall s \geq S, \theta_s = 0\}$$

et munissons-le de la distance

$$d(\theta,\theta') = \sum_{s=1}^{+\infty} |e^{i\theta_s} - e^{i\theta'_s}|, \;\; \theta,\theta' \in M.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons la projection

$$\begin{array}{rcl} P_n : Lip_0(M) & \to & Lip_0(]-\pi,\pi[^{2^n}) \\ f & \mapsto & [(\theta_1,\dots,\theta_{2^n}) \mapsto f(\theta_1,\dots,\theta_{2^n},0,\dots)] \end{array}$$

et l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{Q_n} : Lip_0(M) & \to & \ell_1(\mathbb{N}) \\ f & \mapsto & \Big(k_1\widehat{P_n f}(k_1\sigma_1),\dots,k_n\widehat{P_n f}(k_n\sigma_n),0,\dots\Big) \end{array}.$$

Comme $\|Q_n\| \leq C$, nous en déduisons que $\|\widetilde{Q_n}\| \leq C$.
De plus, pour $j \leq n$, la fonction g_j définie par

$$g_j(\theta) = \frac{1}{k_j} e^{ik_j \sum_{s=1}^{+\infty} \sigma_j^{(s)}\theta_s} - \frac{1}{k_j}, \;\; \theta \in M$$

appartient à $B_{Lip_0(M)}$ et vérifie $\widetilde{Q_n}(g_j) = e_j$, où $\{e_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $\ell_1(\mathbb{N})$.
Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. Définissons

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{Q} : Lip_0(M) & \to & \ell_1(\mathbb{N}) \\ f & \mapsto & w^* - \lim_{n\in\mathcal{U}} \widetilde{Q_n}(f) \end{array}.$$

Alors $\|\widetilde{Q}\| \leq C$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\widetilde{Q}(g_j) = e_j$ donc $\widetilde{Q}$ est un quotient de $Lip_0(M)$ sur $\ell_1(\mathbb{N})$.
Notons

$$N = \left\{\theta \in]-\pi,\pi[^{\mathbb{N}} \; ; \; \sum_{s=1}^{+\infty} |e^{i\theta_s} - 1| < +\infty \right\}$$

et munissons cet espace de la distance

$$d(\theta,\theta') = \sum_{s=1}^{+\infty} |e^{i\theta_s} - e^{i\theta'_s}|,$$

où $\theta, \theta' \in N$.
Si

$$\begin{array}{rrcl} R: & Lip_0(N) & \to & Lip_0(M) \\ & f & \mapsto & f_{|M} \end{array},$$

alors $Q := \widetilde{Q}R$ est un quotient de $Lip_0(N)$ sur $\ell_1(\mathbb{N})$ de norme inférieure à C.
Pour $j \in \mathbb{N}$, la fonction g_j est bien définie sur N et si

$$Y := \overline{\text{vect}}\{g_j \ ; \ j \in \mathbb{N}\},$$

alors $Q_{|Y}$ est un isomorphisme entre Y et $\ell_1(\mathbb{N})$. En effet, pour $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N})$,

$$\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_1 = \left\|\sum_{j=1}^{+\infty} a_j e_j\right\|_1 = \left\|Q\left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_j g_j\right)\right\|_1 \leq C\left\|\sum_{j=1}^{+\infty} a_j g_j\right\|_L \leq C\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|,$$

car Q est de norme inférieure à C et $g_j \in B_{Lip_0(N)}$.
Identifions N à un sous-ensemble de $\ell_1(\mathbb{N})$ via l'isométrie

$$\begin{array}{rrcl} J: & N & \to & \ell_1(\mathbb{N}) \\ & (\theta_s)_{s\in\mathbb{N}} & \mapsto & \left(e^{i\theta_s} - 1\right)_{s\in\mathbb{N}} \end{array}.$$

Il existe alors une isométrie linéaire surjective $\widetilde{J}$ de $Lip_0(J(N))$ sur $Lip_0(N)$.
Soient

$$\begin{array}{rrcl} L: & \ell_1(\mathbb{N}) & \to & Y \subset Lip_0(N) \\ & \sum\limits_{j=1}^{+\infty} a_j e_j & \mapsto & \sum\limits_{j=1}^{+\infty} a_j g_j \end{array}$$

et

$$P := LQ : Lip_0(N) \to Y.$$

L'opérateur L étant de norme 1, nous en déduisons que P est continu. De plus, P est une projection car pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(g_j) = g_j$.
Finalement, soit

$$\begin{array}{rrcl} S: & Lip_0(\ell_1(\mathbb{N})) & \to & Lip_0(J(N)) \\ & f & \mapsto & f_{|J(N)} \end{array}.$$

Alors $\widetilde{P} := P \circ \widetilde{J} \circ S : Lip_0(\ell_1(\mathbb{N})) \to Y$ est une projection linéaire continue.
En conclusion l'espace $\ell_1(\mathbb{N})$ est isomorphe à Y qui est complémenté dans $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N}))$.

□

En adaptant encore cette preuve, il est peut-être possible de construire une projection de $Lip_0(\ell_1(\mathbb{N}))$ sur $\ell_1(\mathbb{N})$ qui est préfaiblement continue. Dans ce cas nous obtiendrions que $c_0(\mathbb{N})$ est complémenté dans $\mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}))$.

Bibliographie

[A-L] I. Aharoni et J. Lindenstrauss, *Uniform equivalence between Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 281-283

[BM] L. Borel-Mathurin, *Approximation properties and non-linear geometry of Banach space*, Houston J. of Math. **38** (2012), no. 4, 1135-1148.

[B] J. Bourgain *The metrical interpretation of super-reflexivity in Banach spaces*, Israel J. Math. **56** (1986), 221-230.

[Bu] P. Buneman, *A Note on the Metric Properties of Trees*, J. Combinatorial Theory Ser. B. **17** (1974), 48-50.

[B-V] J.M. Borwein et J. Vanderwerff, *Constructible convex sets*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 61-77.

[C1] P.G. Casazza, *Approximation properties*, Handbook of the geometry of Banach spaces. **vol.1** (2001), 271-316.

[C2] P.G. Casazza, *The commuting bounded approximation property for Banach spaces*, London Math. Soc. Lecture Notes. **138** (1989), 108-128.

[C-K] P.G. Casazza et N.J. Kalton, *Notes on approximation properties in separable Banach spaces*, London Math. Soc. Lecture Notes. **158** (1991), 49-65.

[C-D] M. Cúth et M. Doucha, *Lipschitz-free spaces over ultrametric spaces*, prépublication, arXiv :1411.2434 [math.FA].

[D1] A. Dalet, *Free spaces over countable compact metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. (2015), DOI : http ://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2015-12518-X.

[D2] A. Dalet, *Free Spaces Over Some Proper Metric Spaces*, Mediterr. J. Math. (2014) DOI : 10.1007/s00009-014-0455-5.

[D-K-P] A. Dalet, P. Kaufmann et A. Procházka, *Free sapces over ultrametric spaces are never isometric to ℓ_1*, prépublication, arXiv :1502.02719 [math.FA].

[D-F] Y. Dutrieux et V. Ferenczi, *The Lipschitz free Banach spaces of $\mathcal{C}(K)$-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2005), no. 4, 1039-1044.

[E] S.N. Evans, *Probability and real trees*, Volume 1920 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 2008.

[G] A. Godard, *Tree metrics and their Lipschitz-free spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 12, 4311-4320.

[Go1] G. Godefroy, *Boundaries of a convex set and interpolation sets*, Math. Ann. **277** (1987), no. 2, 173- 184.

[Go2] G. Godefroy, *The use of norm attainment*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **20** (2013), no. 3, 417-423.

[Go3] G. Godefroy, *Extensions of Lipschitz functions and Grothendieck's bounded approximation property*, à paraître dans North-Western European Journal of Mathematics.

[G-K] G. Godefroy et N.J. Kalton, *Lipschitz-free Banach spaces.* Studia Math. **159** (2003), no. 1, 121-141.

[G-O] G. Godefroy et N. Ozawa, *Free Banach spaces and the approximation properties*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), no. 5, 1681-1687.

[G-S] G. Godefroy et P.D. Saphar, *Three-space problems for the approximation properties*, Proc. Amer. Math. Soc., **105** (1989), no. 1, 70-75.

[Gr] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[H-M] S. Heinrich et P. Mankiewicz, *Applications of ultrapowers to the uniform and Lipschitz classification of Banach spaces*, Studia Math. **73** (1982), no. 3, 225–251.

[J] W.B. Johnson, *On the existence of strongly series summable Markuschevich bases in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **157** (1971), 481-486.

[J-Z] W.B. Johnson et M. Zippin, *On subspaces of quotients of* $(\sum G_n)_{\ell_p}$ *and* $(\sum G_n)_{c_0}$, Israel J. Math. **13** (1972), 311-316.

[K1] N.J. Kalton, *Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications*, Collect. Math. **55** (2004), no. 2, 171-217.

[K2] N.J. Kalton, *The uniform structure of Banach spaces*, Math. Ann. **354** (2012), no. 4, 1247-1288

[Kl] B.R. Kloeckner, *A geometric study of Wasserstein space : Ultrametrics*, Mathematika. **61** (2015), no. 1, 162-178

[L] J. Lindenstrauss, *On nonlinear projections in Banach spaces*, Michigan Math. J. **11** (1964), 263–287.

[L-Q] D. Li et H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach - Analyse et Probabilités*, Cours Spécialisés 12, Société Mathématique de France, 2004.

[L-S] D.R. Lewis et C. Stegall, *Banach spaces whose duals are isomorphic to* $l_1(\Gamma)$, J. Functional Analysis. **12** (1973), 177-187.

[M] J. Matoušek, *Extension of Lipschitz mappings on metric trees*, Comment. Math. Univ. Carolinae. **31** (1990), no. 1, 99-104.

[N-S] A. Naor et G. Schechtman, *Planar earthmover in not in* L_1, SIAM J. Comput. **37** (2007), no. 3, 804-826.

[O] M. I. Ostrovskii, *Metric Embeddings : Bilipschitz and coarse embeddings into Banach spaces*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 49, De Gruyter, Berlin, 2013.

[P-P] J. Ī. Petunīn et A. N. Plīčko, *Some properties of the set of functionals that attain a supremum on the unit sphere*, Ukrain. Mat. Ž. **26** (1974), 102-106.

[P] R. S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516-541.

[S] A. Sobczyk, *Projection of the space* (m) *on its subspace* $c_0(\mathbb{N})$, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 938-947.

[SF] J. Suárez de la Fuente, *On the uniform structure of separable* $\mathcal{L}_\infty$*-spaces*, J. Functional Analysis **266** (2014) 1050–1067

[W] N. Weaver, *Lipschitz algebras*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1999.